LA DIMENSION DU NOYAU DE L'OPÉRATEUR DE DIRAC
UNE COLLABORATION AVEC M. DAHL ET E. HUMBERT

BERND AMMANN

ABSTRACT. Le théorème de l'indice d'Atiyah et Singer donne une borne inférieure à la dimension du noyau de l'opérateur de Dirac. Nous avons montré que cette borne est atteinte par des métriques génériques.

1. Le noyau des opérateurs de Dirac généralisés

Dans ce rapport je veux expliquer des résultat que j'ai obtenu en collaboration avec M. Dahl et E. Humbert [2]. Je vais donner un exemple en dimension 2 en détail.

Soit M une variété compacte, connexe et spin de dimension n. Dans cet article une variété spin est une variété munie d'une orientation et d'une structure spinorielle. On suppose que S^1 est muni de la structure spinorielle qui apparaît lorsque S^1 est vu comme le bord de la boule B^2. Après avoir choisi une métrique riemannienne g sur M, la variété M porte plusieurs opérateurs différentiels géométriques. Dans cet article nous nous intéressons surtout à l'opérateur de Hodge–de-Rham Δ^g et à l'opérateur de Dirac D^g (voir par exemple [21] et [15, 9, 11] pour des introductions au sujet).

L'opérateur de Hodge-de Rham Δ^g est défini par $(d+\delta^g)^2 : \Gamma(\bigwedge^* T^*M) \to \Gamma(\bigwedge^* T^*M)$, où d est la différentielle extérieure agissant sur les formes et où δ^g est son adjoint qui dépend du choix de la métrique g. La théorie de Hodge nous dit que

$$\ker \Delta^g = \ker(d+\delta^g) = \bigoplus_{i=0}^{n} \Gamma(\bigwedge^i T^*M) \cap \ker(d+\delta_g)$$

et on appelle $b_i := \dim \Gamma(\bigwedge^i T^*M) \cap \ker(d+\delta_g)$ le i-ème nombre de Betti. Le nombre b_i est égal à la dimension du i-ème groupe de cohomologie de de-Rham, et donc tous les b_i sont indépendants de la métrique g. On obtient $\dim\ker\Delta^g = \sum_{i=0}^n b_i$.

En introduisant la graduation $\bigwedge^* T^*M = \bigwedge^{pair} T^*M \oplus \bigwedge^{impair} T^*M$, on obtient un autre invariant différentiel, la caractéristique d'Euler. Ce nombre est défini par

$$\chi(M) := \dim\ker(d+\delta^g)|_{\Gamma(\bigwedge^{pair} T^*M)} - \dim\ker(d+\delta^g)|_{\Gamma(\bigwedge^{impair} T^*M)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i.$$

Comme le noyau d'un opérateur est le co-noyau de son adjoint, on peut regarder $\chi(M)$ comme l'indice de l'opérateur de Fredholm

$$(d+\delta^g) : \Gamma(\bigwedge^{pair} T^*M) \to \Gamma(\bigwedge^{impair} T^*M).$$

Le théorème de Gauss-Bonnet-Chern nous donne la formule $\chi(M) = \int_M \chi(TM)$ où $\chi(TM) \in \Gamma(\bigwedge^n T^*M)$ est la classe d'Euler de TM. La classe d'Euler est une

Date: Novembre 2008.

forme caractéristique (voir [17], [12] et [5] pour plus d'informations sur les classes caractéristiques). En particulier, $\chi(TM)$ peut être calculé à partir de la courbure de TM (dans le cas $n = 2$, on a $\chi(TM) = 2\pi K_g$, où K_g est la courbure de Gauss, et on obtient la formule de Gauss-Bonnet élémentaire $\chi(M) = 2\pi \int_M K_g$).

Donc, nous obtenons la formule d'indice

$$\text{ind } \left\{(d+\delta^g) : \Gamma(\bigwedge\nolimits^{pair} T^*M) \to \Gamma(\bigwedge\nolimits^{impair} T^*M)\right\} = \int_M \chi(TM). \tag{1}$$

Pour l'opérateur de Dirac on a une formule d'indice analogue que nous expliquerons dans le paragraphe suivant. La métrique et la structure spinorielle permettent de définir un fibré vectoriel hermitien, appelé le *fibré spinoriel* ΣM. La variété M porte un opérateur naturel autoadjoint: l'opérateur de Dirac $D^g : \Gamma(\Sigma M) \to \Gamma(\Sigma M)$. C'est un opérateur différentiel de premier ordre. Si la dimension n est paire, alors ΣM est gradué de manière naturelle $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$ et dans cette graduation l'opérateur de Dirac est impair, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme

$$D^g = \begin{pmatrix} 0 & D^g_- \\ D^g_+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme l'opérateur D^g_+ est elliptique, c'est un opérateur de Fredholm $\Gamma(\Sigma^+ M) \to \Gamma(\Sigma^- M)$, et

$$\text{ind } D^g_+ = \dim\ker D^g_+ - \dim \operatorname{coker} D^g_+ = \dim\ker D^g_+ - \dim\ker D^g_-.$$

Le théorème d'Atiyah et Singer [1] donne la célèbre formule

$$\text{ind } D^g_+ = \int_M \widehat{A}(TM). \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) ont beaucoup de points communs. Le membre de gauche est l'indice d'un opérateur elliptique de premier ordre, le membre de droite est l'intégrale sur M d'une classe caractéristique de TM. De telles intégrales ne dépendent que de la topologie et de la structure différentielle de M. Par conséquent les indices ind $(d+\delta^g)$ et ind D^g_+ ne dépendent pas de la métrique.

L'analogie entre ces résultats s'explique par le fait que les deux opérateurs $d+\delta^g$ et D^g_+ sont des opérateurs de Dirac généralisés, un cadre dans lequel un tel théorème d'indice est valable (voir par exemple [18]). L'opérateur de signature sur une variété de dimension n divisible par 4 et l'opérateur $\partial + \partial^*$ où ∂ est l'opérateur de Dolbeault d'une variété kählérienne sont d'autres exemples d'opérateurs de Dirac généralisés.

Changeons maintenant de point de vue : à la place de nous intéresser à la différence des dimensions des noyaux, regardons la somme. Nous étudions donc

$$\dim\ker(d+\delta^*) = \dim\ker(d+\delta^g)|_{\Gamma(\bigwedge^{pair} T^*M)} + \dim\ker(d+\delta^g)|_{\Gamma(\bigwedge^{impair} T^*M)}$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker D^g = \dim_{\mathbb{C}} \ker D^g_+ + \dim_{\mathbb{C}} \ker D^g_-.$$

La dimension de $\ker(d+\delta^g)$ est égale à $\sum_{i=0}^n b_i$ et est donc donnée par la topologie de M. Le même résultat s'applique pour l'opérateur de signature. Sur une variété kählerienne la dimension du noyau de $\partial + \partial^*$ est déterminée par la topologie, la structure différentielle et sa structure complexe.

Ces faits ont motivé l'étude de $k_g := \dim_{\mathbb{C}} \ker D^g$ par Hitchin [13]. En particulier, Hitchin montre [13] que si g' est conforme à g, alors $k_g = k_{g'}$. D'autre part, si on fait varier la structure conforme, k_g n'est plus constant. Dans le prochain paragraphe, on va étudier le cas des surfaces riemanniennes spin et la dépendance de k_g par rapport à g va être explicitement mise en évidence sur un exemple.

2. Surfaces riemanniennes

Dans ce paragraphe soit M une surface compacte et connexe munie d'une structure spinorielle. On commence par plusieurs rappels que l'on mentionne sans preuve. Comme dans le cas général le choix d'une métrique riemannienne g sur M nous permet de définir le fibré spinoriel $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$ et l'opérateur de Dirac D^g. Puisque nous avons $\dim M = 2$ on peut montrer les relations naturelles

$$\Sigma^+ M \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma^+ M \cong TM \cong \Lambda^{0,1} T^* M,$$

$$\Sigma^- M \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma^- M \cong \overline{TM} \cong \Lambda^{1,0} T^* M.$$

L'opérateur de Dirac est alors donné par

$$D^g = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\partial} \\ \partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque la structure quaternionienne du fibré spinoriel commute avec l'opérateur de Dirac, le nombre k_g est pair. De plus on peut montrer que $\alpha(M) := k_g/2 \mod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est indépendant du choix de la métrique sur M, mais $\alpha(M)$ dépend du choix de la structure spinorielle. On sait aussi que sur toute surface riemannienne de genre γ, on a la borne $k_g \leqslant \gamma + 1$ [13, 2.1, Remark (4)].

Proposition 2.1. Soient M_1 et M_2 deux surfaces compactes connexes (sans bord) de même genre, munies de structures spinorielles. Supposons $\alpha(M_1) = \alpha(M_2)$. Alors il y a un difféomorphisme de M_1 à M_2 qui preserve leurs structures spinorielles.

On dit que M est un *bord spinoriel* s'il existe une 3-variété W à bord et spin avec $M = \partial W$ (dans le sens des variétés spin). Si M est un bord spinoriel alors on a $\alpha(M) = 0$. Si la surface M est plongée dans $\mathbb{R}^3$, alors c'est le bord de l'intérieur. Donc si M est plongée et si la structure spinorielle est celle provenant de la structure spinorielle de $\mathbb{R}^3$, alors $\alpha(M) = 0$. Le lemme nous dit que toute surface avec structure spinorielle et avec $\alpha(M) = 0$ est spin-difféomorphe à une surface plongée munie de la structure spinorielle induite par $\mathbb{R}^3$.

La structure spinorielle sur S^2 est unique, et la surface S^2 avec cette structure spinorielle est le bord spinoriel du disque de dimension 3, donc $\alpha(S^2) = 0$. Par contre, les surfaces riemanniennes compactes de genre $\gamma \neq 0$ admettent des structures spinorielles avec $\alpha(M) = 0$ (qui sont des bords spinoriels), et en admettent d'autres avec $\alpha(M) = 1$ qui ne sont pas de bords spinoriels. M est un bord spinoriel si et seulement si $\alpha(M) = 0$. Par exemple si l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par translation est relevée de manière triviale sur la structure spinorielle de $\mathbb{R}^2$, alors le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est muni d'une structure spinorielle, telle que $\alpha(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = 1$.

Maintenant, si M est une surface riemannienne de genre $\gamma \leqslant 2$, munie d'une structure spinorielle telle que M est un bord spinoriel, alors k_g est d'une part divisible par 4 et d'autre part au plus 3. Donc k_g est forcément nul pour toute métrique sur M. De manière analogue, dans le cas où M n'est pas un bord spinoriel, on obtient $k_g = 2$ pour $\gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$ et toute métrique g. Dans tous les autres cas de surfaces riemanniennes spin, il y a des métriques avec $k_g = 2[(\gamma + 1)/2]$, voir [13, 7], mais aussi des métriques avec $k_g \in \{0,2\}$, voir [16]. L'existence d'une métrique avec $k_g \in \{0,2\}$ va donner un premier exemple illustrant le résultat du théorème A.

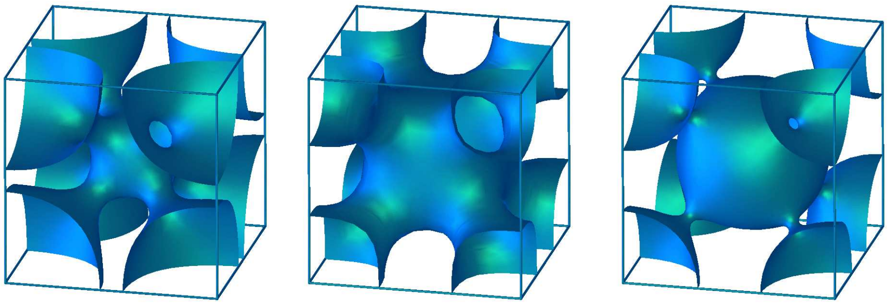

FIGURE 1. La surface $F_t(M)$ pour $t<0$, $t=0$ et $t>0$. Merci à Karsten Große-Brauckmann pour ces images.

On va visualiser graphiquement la dépendance de k_g en fonction de g. Soit M une surface riemannienne de genre 4. (Les mêmes arguments s'appliquent pour le genre 3.) Karsten Große-Brauckmann a construit une famille lisse de plongements $F_t : M \to \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ telle que $F_t(M)$ a une courbure moyenne constante h_t, telle que $h_0 = 0$, et telle que $dh_t/dt > 0$, voir la figure 1. De plus $F_t(M)$ sépare le tore $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ en deux composantes connexes et $F_t(M)$ est le bord de chaque composante. On suppose que M porte la structure spinorielle induite par le plongement F_t. C'est donc un bord spinoriel. Soit g_t la métrique induite par F_t, c'est-à-dire que les applications F_t sont des plongements isométriques $F_t : (M, g_t) \to \mathbb{R}^3$. La représentation de Weierstrass spinorielle de Kusner et Schmitt [14] (voir aussi [4]) nous dit que la restriction d'un spineur parallèle de $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ donne un spineur de longueur constante sur $F_t(M) \cong M$, et ce spineur restreint $\phi_t \in \Gamma(\Sigma^{g_t} M)$ satisfait $D^{g_t}\phi_t = h_t \phi_t$, $|\phi_t| \equiv 1$. On voit que $k_{g_0} \neq 0$, et que pour $t \to 0$ au moins une valeur de D^{g_t} converge vers 0 ce qui implique que k_{g_t} possède une discontinuité en $t=0$.

D'autre part on sait déjà que k_{g_t} est égal à 4 ou 0. On en déduit, que $k_{g_0} = 4$ et que $k_{g_t} = 0$ pour $t \neq 0$ proche de 0. Cela implique que k_g dépend de la structure conforme dans cet exemple.

3. Dans le cas générique, k_g est minimal

On se pose maintenant la question suivante: étant donnée une variété différentiable M avec une structure spinorielle, quelles sont les valeurs qui sont atteintes par la fonction $g \mapsto k_g$? En particulier, quel en est le supremum et le minimum ? On pense que le supremum est toujours infini si la dimension est au moins 3, mais on ne sait le montrer que sur très peu de variétés (on sait par exemple le faire sur S^3 [13]). Souvent, il est même difficile de montrer qu'il existe une métrique telle que $k_g \neq 0$ ([13], [3], [19], [8]). D'autre part la formule d'indice (2) donne l'estimation

$$k_g \geqslant \left| \int \widehat{A}(TM) \right|.$$

Le membre de droite est nul sauf si n est divisible par 4. En dimension $n \equiv 1 \mod 8$ et $n \equiv 2 \mod 8$ il y a une autre obstruction: l'invariant

$$\alpha(M) := \begin{cases} k_g \mod 2 & \text{si } n \equiv 1 \mod 8 \\ (k_g/2) \mod 2 & \text{si } n \equiv 2 \mod 8 \end{cases}$$

est indépendant de la métrique, mais dépend de M et de sa structure spinorielle et prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

En prenant ces obstructions en compte, nous obtenons

$$k_g \geqslant \begin{cases} |\widehat{A}(M)|, & \text{si } n \equiv 0 \mod 4; \\ 1, & \text{si } n \equiv 1 \mod 8 \text{ et } \alpha(M) = \bar{1}; \\ 2, & \text{si } n \equiv 2 \mod 8 \text{ et } \alpha(M) = \bar{1}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

La borne inférieure que l'on obtient pour k_g est donc une quantité topologique, qui ne dépend que de la structure différentielle sur M si n est divisible par 4, et que de la structure différentielle sur M et de sa structure spinorielle dans les cas $n \equiv 1$ et $n \equiv 2 \mod 8$.

Dans le théorème suivant une métrique g est dite *D-minimale* si on a égalité dans (3).

Théorème A (Théorème de D-minimalité, [2]).
Soit M une variété spin connexe, compacte de dimension au moins 2. Alors toute métrique générique est D-minimale.

Dans ce théorème, "générique" signifie que l'ensemble de toutes les métriques D-minimales est dense par la topologie C^∞ et ouvert par la topologie C^1.

4. L'idée de la preuve: la chirurgie

La démonstration du Théorème A a une histoire riche et intéressante. Selon S. Maier [16], il suffit de construire une seule métrique D-minimale sur M pour montrer le théorème. Dans le même article, Maier utilise des méthodes perturbatives pour construire une telle métrique sur toute variété de dimension au plus 4.

La construction d'une métrique D-minimale est fortement liée au problème de construire une métrique à courbure scalaire positive. En particulier, la formule de Lichnerowicz

$$D^2\phi = \nabla^*\nabla\phi + \frac{\mathrm{scal}}{4}\phi$$

implique que $k_g = 0$ pour toute métrique g à courbure scalaire positive. Donc la propriété d'admettre une métrique à courbure scalaire positive est plus forte que l'existence d'une métrique telle que $k_g = 0$.

Un grand pas dans le problème de décrire les variétés admettant une métrique à courbure scalaire positive a été accompli par Gromov-Lawson [10] et par Stolz [20]. En utilisant des techniques de la théorie de la chirurgie, Gromov et Lawson ont montré que toute variété compacte, connexe, simplement connexe, non-spin de dimension au moins 5 admet une métrique à courbure scalaire positive. Plus tard, Stolz [20] a combiné ces méthodes de chirurgie avec des résultats sur les suites spectrales. Il a réussi à en conclure qu'une variété connexe, simplement connexe et spin de dimension au moins 5 porte une métrique à courbure scalaire positive si et seulement si le membre de droite de l'inégalité (3) est nul.

Pour donner plus de détails, on note S^k (resp. B^k et D^k) la sphère (resp. la boule ouverte et la boule fermée) de dimension k, c'est-à-dire $S^{k-1} = \partial D^k$ et $D^k = \overline{B^k}$. On suppose qu'un plongement $\phi : S^k \times D^{n-k} \hookrightarrow M$ est donné. Alors $M_0 := M \setminus \phi(S^k \times B^{n-k})$ est une variété dont le bord est $S^k \times S^{n-k-1}$. On définit $M^\# :=$

$M_0 \cup_\phi (D^{k+1} \times S^{n-k-1})$ où $\cup_\phi$ signifie qu'on identifie sur $M_0 \cup (D^{k+1} \times S^{n-k-1})$ le point $x \in S^k \times S^{n-k-1} = \partial(D^{k+1} \times S^{n-k-1})$ avec $\phi(x) \in \phi(S^k \times D^{n-k})$ (voir Figure 2). L'espace quotient topologique ainsi obtenu porte un atlas différentiel tel que les inclusions $M_0 \to M^\#$ et $D^{k+1} \times S^{n-k-1} \to M^\#$ sont des plongements lisses.

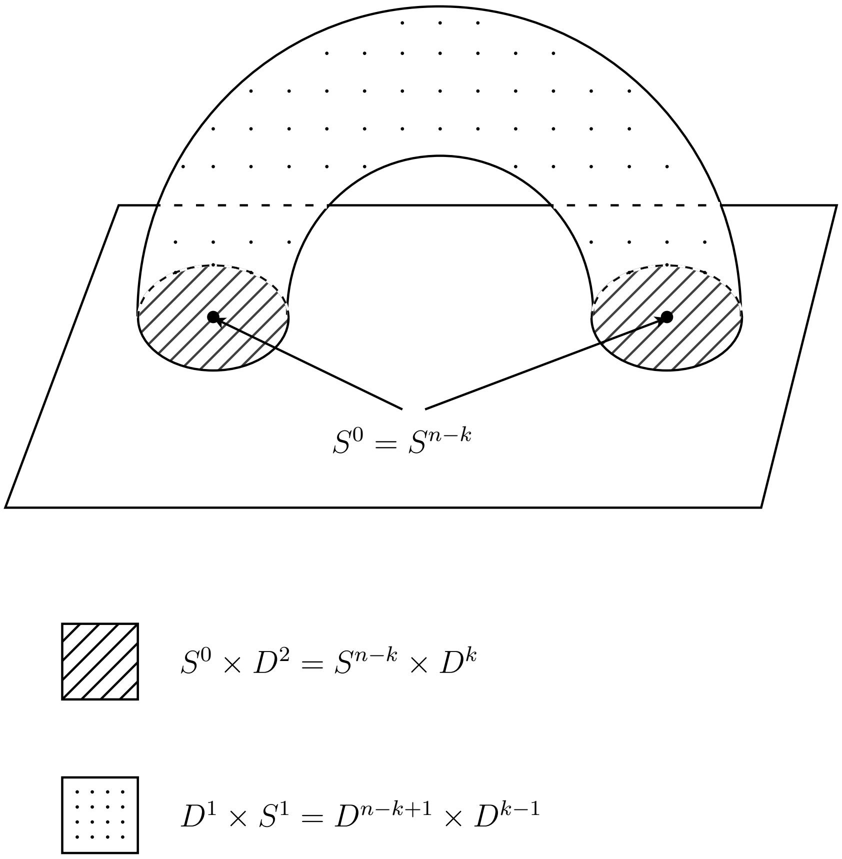

FIGURE 2. Chirurgie pour $k = 0$ et $n = 2$.

On dit alors que $M^\#$ est obtenu par *chirurgie de dimension* k. Bien sûr cette construction dépend du plongement ϕ. Le nombre $n - k$ est appelé la codimension de la chirurgie. On dit que la chirurgie est *spin* si ces deux plongements préservent l'orientation et la structure spinorielle.

Gromov et Lawson montrent un résultat clé:

Résultat clé de Gromov-Lawson. *Supposons qu'une variété compacte M porte une métrique à courbure scalaire positive, et que $M^\#$ est obtenue de M par une chirurgie de codimension au moins* 3. *Alors $M^\#$ porte aussi une métrique à courbure scalaire positive.*

Ce résultat n'est plus vrai pour des chirurgies de codimension 2.

Une version spinorielle de ces résultats était alors donnée par C. Bär et M. Dahl [6]. En effet, ils ont montré:

Résultat clé de Bär-Dahl. *Supposons qu'une variété compacte spin M porte une métrique D-minimale, et supposons que $M^\#$ est obtenue de M par une chirurgie* *spin de codimension au moins* 3*. Alors* $M^{\#}$ *porte aussi une métrique D-minimale.*

Avec ce résultat, ils ont obtenu le théorème A pour toute variété simplement connexe de dimension au moins 5. Quelques autres groupes fondamentaux pouvaient être traités avec les mêmes méthodes.

Néanmoins, les méthodes de [6] ne marchent qu'en codimension $\geqslant 3$. Dans [2] nous donnons une construction qui montre que le résultat clé reste vrai en codimension 2.

Théorème B *Si* M *porte une métrique D-minimale et si* $M^{\#}$ *est obtenue de* M *par chirurgie de codimension* $\geqslant 2$*, alors* $M^{\#}$ *porte aussi une métrique D-minimale.*

Du point de vue du problème de courbure scalaire positive, ce résultat est très étonnant lorsque la codimension est exactement 2. Cette liberté supplémentaire de faire des chirurgies de codimension 2 permet d'enlever toutes les hypothèses dans le résultat clé de Bär-Dahl. Autrement dit, toute variété compacte spin s'obtient par un nombre fini de chirurgies de codimension supérieure à 2 à partir de variétés simples qui portent une métrique D-minimale. Le théorème A en découle.

Une question naturelle est maintenant de savoir si le Théorème B s'étend aux chirurgies de codimension 1. La réponse est non. En effet, si M est une surface $K3$, c'est-à-dire si M est une variété compacte, simplement connexe et spin de dimension 4 avec $\widehat{A}(M) = 2$, et si $-M$ est la même variété M, mais avec l'orientation contraire, alors le théorème d'indice implique que l'union disjointe $N := M\dot{\cup} - M$ satisfait $k_{g^N} \geqslant 4$ pour toute métrique g^N sur N. Il n'y a donc pas de métriques D-minimales sur N. Cela ne contredit pas le théorème A puisque N n'est pas connexe. D'autre part, pour la somme connexe $C := M\# - M$, on calcule que $\widehat{A}(C) = 0$, et comme C est connexe, le théorème A donne l'existence d'une métrique g^C avec $k_{g^C} = 0$. On passe de N à C par une chirurgie spin de dimension 0, ce qui équivaut à dire qu'on passe de C à N par une chirurgie spin de dimension $3 = 4 - 1$, c.-à-d. de codimension 1. Donc, on a bien trouvé un exemple montrant que le théorème B ne peut pas être vrai pour des chirurgies spin de codimension 1.

Plus de détails peuvent être obtenus dans [2] et sur le site oueb http://www.berndammann.de/publications.

L'auteur remercie Mattias Dahl, Emmanuel Humbert et Nicolas Ginoux, Regensburg, pour l'aide qu'ils ont apportée à la rédaction de cet article.

References

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422–433.

[2] B. Ammann, M. Dahl, E. Humbert, *Surgery and harmonic spinors*, Adv. Math. **220** (2009), 523-539.

[3] C. Bär, *Metrics with harmonic spinors*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), 899–942.

[4] ———, *Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator*, Ann. Global Anal. Geom. **16** (1998), 573–596.

[5] ———, *Charakteristische Klassen*, Unpublished lecture notes, University of Potsdam, http://www.math.uni-potsdam.de/~baer, 2006.

[6] C. Bär and M. Dahl, *Surgery and the Spectrum of the Dirac Operator*, J. Reine Angew. Math. **552** (2002), 53–76.

[7] C. Bär and P. Schmutz, *Harmonic spinors on Riemann surfaces.*, Ann. Global Anal. Geom. **10** (1992), 263–273.

[8] M. Dahl, *On the space of metrics with invertible Dirac operator*, Comment. Math. Helv. **83**, (2008), 451–469.

[9] T. Friedrich, *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Vieweg, 1997.

[10] M. Gromov and H. B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 423–434.

[11] O. Hijazi, *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures.*, Ocampo, Hernan (ed.) et al., Geometric methods for quantum field theory. Proceedings of the summer school, Villa de Leyva, Colombia, July 12-30, 1999. Singapore: World Scientific. 116–169 , 2001.

[12] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[13] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Adv. Math. **14** (1974), 1–55.

[14] R. Kusner and N. Schmitt, *The spinor representation of surfaces in space*, preprint, http://www.arxiv.org/abs/dg-ga/9610005, 1996.

[15] H.-B. Lawson and M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[16] S. Maier, *Generic metrics and connections on spin- and spin^c-manifolds*, Comm. Math. Phys. **188** (1997), 407–437.

[17] J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[18] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, no. 179, Longman, 1988.

[19] L. Seeger, *Harmonische Spinoren auf gerade-dimensionalen Sphären*, PhD Thesis, University of Hamburg, Shaker Verlag, Aachen, Germany, ISBN 978-3-8265-8755-9, 2000.

[20] S. Stolz, *Simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math. (2) **136** (1992), no. 3, 511–540.

[21] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.*, Graduate Texts in Mathematics, 94, Springer-Verlag 1983.

Bernd Ammann, University of Regensburg, Department of Mathematics, Universitätsstr. 31, D-93040 Regensburg

E-mail address: bernd.ammann@mathematik.uni-regensburg.de