Spin-Strukturen und das Spektrum des Dirac-Operators

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematischen Fakultät
der Albert-Ludwigs-Universität
Freiburg im Breisgau

vorgelegt von

Bernd Eberhard Ammann

Mai 1998

Dekan:	Prof. Dr. Ludger Rüschendorf
1. Referent:	Prof. Dr. Christian Bär
2. Referent:	Prof. Dr. Ernst Kuwert
Datum der Promotion:	31.7.1998

Aktuelle Adresse

Bernd Ammann
Mathematisches Institut
Universität Freiburg
Eckerstraße 1
D-79104 Freiburg

EMAIL ammannΓatΓmath.hamburg.de
WWW http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann

Vorwort

Einigen Menschen, die zum Gelingen dieser Doktorarbeit beigetragen haben, soll an dieser Stelle herzlich gedankt werden.

Meinem Betreuer Prof. Christian Bär danke ich für die interessante Themenstellung, die vielen mathematischen Diskussionen und seine Ermutigungen, wenn ich den Eindruck hatte, auf der Stelle zu treten. Meine Kollegen Dr. Franz Auer, Dr. Sebastian Goette, Lutz Seeger und Dr. Karl Friedrich Siburg waren mir eine große Hilfe beim Korrekturlesen der Arbeit. Von den Professoren Victor Bangert und Ernst Kuwert sowie von Dr. Reiner Schätzle erfuhr ich viele mathematische Sachverhalte über geschlossene Geodäten, den 2-Torus und das Willmore-Funktional, die ich in dieser Arbeit verwenden konnte. Dank sagen möchte ich auch Harald Alferi, von dem ich viele TEXnische Tricks lernen konnte. Die Wortschöpfung „Pinocchio-Metrik" beruht auf einer Idee von Dr. Achim Hornecker.

Der Großteil meiner Promotion wurde freundlicherweise von der Studienstiftung des deutschen Volkes finanziert. Danken möchte ich auch dem DFG-Graduiertenkolleg „Nichtlineare Differentialgleichungen" an der Universität Freiburg, besonders für so manchen anregenden Vortrag und für die unproblematische Erstattung von Reisekosten zu Konferenzen, die wichtigen Einfluß auf meine Arbeit hatten.

Prof. Bruno Colbois von der Université de Savoie in Chambéry (Frankreich) danke ich herzlich für eine Einladung nach Chambéry und Grenoble im Herbst 1997. Von ihm konnte ich vieles über das Verhalten des Laplace-Spektrums bei Kollaps lernen.

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Überblick **1**

2 Grundlagen **7**

2.1 Spin-Geometrie . . . 7

2.2 Einige wichtige Spektralabschätzungen . . . 12

2.3 Spin-Strukturen auf Quotienten von Lie-Gruppen . . . 13

2.4 L^p-Spin-Struktur-Metriken . . . 15

2.5 Spin-Strukturen von Flächen . . . 17

2.6 Wurzeln aus S^1-Bündeln . . . 21

3 Konforme Strukturen auf 2-Tori **25**

3.1 Einführung . . . 25

3.2 Invarianten für Riemannsche 2-Tori . . . 27

3.3 Modulräume . . . 36

3.4 Pinocchio- und Kegel-Metriken . . . 39

3.5 Abschätzung der Streckungsfunktion . . . 44

3.6 Flächeninhalt und Durchmesser . . . 54

3.7 Abschätzung von $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, spin-$\mathcal{V}$ und spin-$\mathcal{W}$ . . . 64

4 Anwendungen auf das Spektrum von 2-Tori **71**

4.1 Spektrum flacher 2-Tori . . . 71

4.2 Spektrum des Laplace-Operators 73
4.3 Spektrum des Dirac-Operators 77

5 Abschätzungen des Willmore-Integrals 81
5.1 Das Willmore-Integral 81
5.2 Immersionen und induzierte Spinoren 83
5.3 Multiplikative Abschätzung 87
5.4 Additive Abschätzung 90
5.5 Die Kugelkette 92

6 Weitere Abschätzungen von Eigenwerten 97
6.1 Abschätzung von $\nabla^*\nabla$ auf S^1-Bündeln 97
6.2 Differentialformenansatz für den 2-Torus 107
6.3 Abschätzung nach oben 112

7 Kollabierende S^1-Bündel 115
7.1 Situation 115
7.2 Kollaps bei projizierbarer Spin-Struktur 117
7.3 Kollaps bei nicht-projizierbarer Spin-Struktur 124
7.4 Kollaps bei konstanter Faserlänge 126

8 Isospektrale Deformationen 129

Bezeichnungen

		Abschnitt	Seite
Arf		2.5	20
area	Flächeninhalt		
$B_r(p)$	Ball vom Radius r um p		
$\mathbb{C}\mathrm{P}^n$	der komplex-projektive Raum der komplexen Dimension n		
$\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$	Clifford-Algebra	2.1	7
χ	Spin-Homomorphismus	2.3	15
D		2.1	11
$\mathrm{diam}(G, M, g)$	extrinsischer Durchmesser	3.6	59
$\mathrm{diam}(G, g)$	intrinsischer Durchmesser	3.6	59
d_p^{Spin}		2.4	17
$(E_1, \ldots, E_n)$	Standardbasis von $\mathbb{R}^n$	2.1	9
$(e_1, \ldots, e_n)$	lokaler ON-Rahmen		
$F^*\varphi$		5.2	84
$F^*\Psi$		5.2	85
g_{eukl}	Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$		
$\tilde{g}$	flache Metrik auf $\mathbb{T}^2$	3.1	26
$\tilde{g}$	Kapitel 7: Metrik auf Totalraum M		
$g_{R,H,\beta}$	Kegel-Metrik	3.4	41
$g_{R,H,0}$	Pinocchio-Metrik	3.4	42
$\Gamma\text{-sys}_1(M, g)$		3.2	27
Γ_k		2.6	23
γ		2.1	9
$\mathrm{Hol}_{\Sigma M}$		6.1	98
$\mathcal{H}_3$		2.6	23
h_q	Hopf-Faserung	2.6	24
K	Schnittkrümmung		
K^+, K^-		3.5	44
K	Killing-Vektorfeld	7.1	116
$\mathcal{K}_p(M, g), \mathcal{K}_p^{\pm}(M, g)$		3.5	44
$\text{Länge}_g(c)$	Länge der Kurve c bezüglich der Metrik g		
$\ell_2(g)$		3.2	28
$\ell_3(g)$		3.2	28
$2\pi\ell$	Faserlänge	6.1, 7.1	97, 116
M_k		2.6	23

$\mathcal{M}$		3.3	36
$\mathbb{N}$	die positiven ganzen Zahlen		
$\omega_{\mathbb{C}}$		2.1	9
$P_{\mathrm{SO}}(M)$		2.1	7
$(P_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi)$	Spin-Struktur	2.1	8
$\mathcal{Q}$		4.2	74
q_{Arf}		2.5	19
$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$	der reell-projektive Raum der Dimension n		
$\mathbb{R}^+$	positive reelle Zahlen		
$\mathbb{R}_0^+$	nicht-negative reelle Zahlen		
$\mathbb{R}^-$	negative reelle Zahlen		
$\mathbb{R}_0^-$	nicht-positive reelle Zahlen		
$\mathcal{S}$		3.5	45
$\mathrm{span}(V_1, V_2)$	der von den Vektoren V_1 und V_2 erzeugte Vektorraum		
$\mathrm{Spin}(n)$		2.1	7
spin-$\ell_2(g, \varepsilon)$		3.2	28
spin-$\mathrm{sys}_1(g, \varepsilon)$		3.2	28
spin-$\mathcal{V}(g, \varepsilon)$, spin-$\mathcal{W}(g, \varepsilon)$		3.2	33
spin-$\widetilde{\mathcal{V}}(g, \varepsilon)$, spin-$\widetilde{\mathcal{W}}(g, \varepsilon)$, spin-$\mathcal{M}$		3.3	38
$\mathrm{sys}_1(M, g) = \ell_1(g)$		3.2	27
Σ_n	Standard-Spinoren zu $\mathbb{R}^n$	2.1	9
$\Sigma M, \Sigma^+ M, \Sigma^- M$		2.1	10
$\Sigma_m M$	Spinoren in ΣM über $m \in M$	2.1	10
$\mathbb{T}^n$	der n-dimensionale Torus		
Θ		2.1	7
$\mathcal{V}(g)$		3.2	33
$\widetilde{\mathcal{V}}(g)$		3.3	36
$W(F)$		5.1	81
$\mathcal{W}(g)$		3.2	33
$\widetilde{\mathcal{W}}(g)$		3.3	36
$\mathbb{Z}_2 := \{-1, 1\}$			
$\times_H$		2.1	7
$\nabla^{\Sigma M}, \langle .,. \rangle$ auf ΣM		2.1	10
$\nabla^* \nabla$		2.1	11
$(.,.)$		2.1	11

Kapitel 1

Motivation und Überblick

Das Hauptanliegen dieser Dissertation ist, untere Abschätzungen für den kleinsten Eigenwert λ des Quadrats des Dirac-Operators zu finden. Die meisten bis heute bekannten Abschätzungen benutzen nur lokale Informationen, um eine Abschätzung zu erhalten, z. B. Skalarkrümmung, evtl. in Kombination mit Kähler-Strukturen oder quaternionischen Kähler-Strukturen (siehe Abschnitt 2.2). Wir wollen uns hingegen auf Abschätzungen konzentrieren, die globale Informationen nutzen. Christian Bär zeigte in seiner Dissertation, daß für eine beliebige Metrik auf S^2 die Ungleichung

$$\lambda \cdot \mathrm{area}(S^2) \geq 4\pi$$

erfüllt ist (Satz 2.2.4). Mit dieser Abschätzung konnte er die Willmore-Ungleichung $\int H^2 \geq 4\pi$ für isometrisch immersierte $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ zeigen [Bä97].

In den Kapiteln 3 bis 5 sollen ähnliche Abschätzungen für den 2-Torus $\mathbb{T}^2$ mit nichttrivialer Spin-Struktur und Totalkrümmung $\int |K| < 4\pi$ hergeleitet werden.

Zwei 2-Tori mit Spin-Struktur und Riemannscher Metrik heißen *spin-konform äquivalent*, wenn es einen konformen Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt, der die Spin-Struktur erhält. Theorem 4.3.2 gibt explizite untere und obere Schranken für alle Eigenwerte des Dirac-Operators. Die Schranke ist eine Funktion des Flächeninhalts, der spin-konformen Äquivalenzklasse und der L^p-Norm der Gaußschen Krümmung ($p > 1$). Die spin-konforme Äquivalenzklasse wird hierbei durch die Invarianten spin-$\widetilde{\mathcal{V}}$ und spin-$\widetilde{\mathcal{W}}$ beschrieben, die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 definiert werden. Diese Invarianten können ihrerseits wieder durch Längen bestimmter geschlossener Geodäten, durch den Flächeninhalt und die Totalkrümmung abgeschätzt werden (Abschnitt 3.7). Alle diese Abschätzungen sind optimal für flache Tori und aus Stetigkeitsgründen deswegen auch nahezu optimal für nahezu flache Tori.

Vergleichen wir unsere Abschätzung mit der Bärschen Abschätzung, so stellt sich die Frage, ob nicht auch für $\mathbb{T}^2$ eine Abschätzung von $\lambda \cdot \mathrm{area}$ möglich ist, die nur

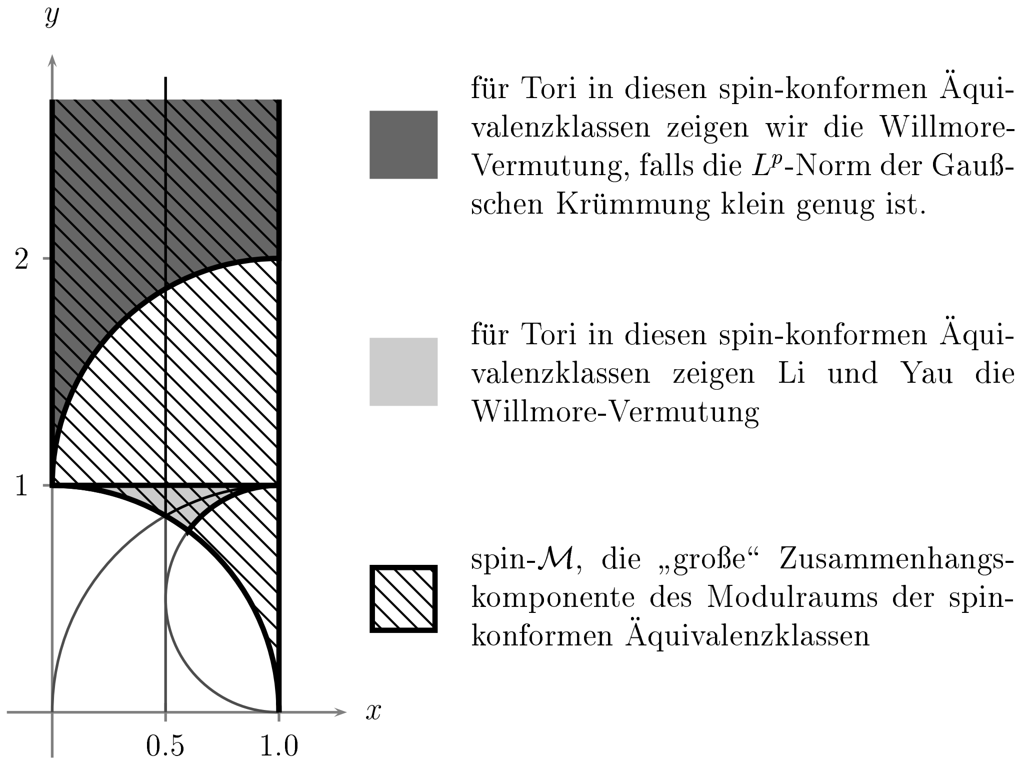


Abbildung 1.1: spin-$\mathcal{M}$ und die Willmore-Vermutung

die Topologie benutzt, d. h. die ohne den Gaußschen Krümmungsterm und ohne die spin-konforme Struktur auskommt. Man sieht jedoch bereits anhand der flachen Tori, daß die spin-konforme Struktur eingehen muß. John Lott bewies in [Lo86, Proposition 1], daß es bei nicht-trivialer Spin-Struktur auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2$ eine Invariante $C > 0$ der spin-konformen Struktur gibt, so daß $\lambda \cdot \text{area} \geq C$. Diese Schranke ist aber leider nicht explizit. Anhand unseres Beispiels „Kugelkette“ aus Abschnitt 5.5 werden wir zudem zeigen, daß das bestmögliche C nicht von einer flachen Metrik angenommen wird. Das Beispiel „Kugelkette“ zeigt uns somit, daß eine Abschätzung, die optimal für alle flachen 2-Tori ist, notwendigerweise einen Gaußschen Krümmungsterm enthalten muß. Offen bleibt jedoch das Problem, eine explizite untere Abschätzung der Eigenwerte von D^2 im Fall $\int |K| \geq 4\pi$ zu finden.

Durch Anwenden unserer Abschätzung können wir in den Abschnitten 5.3 und 5.4 die Willmore-Vermutung

$$\int (H^2 + 1) \geq 2\pi^2$$

für Einbettungen $\mathbb{T}^2 \hookrightarrow S^3$ zeigen, vorausgesetzt die induzierte Metrik und die induzierte Spin-Struktur auf $\mathbb{T}^2$ liegen in einem bestimmten Bereich des spin-konformen

Modulraums und vorausgesetzt die L^p-Norm der Gaußschen Krümmung ist klein genug.

Der zentrale Schritt unserer Abschätzung ist die Herleitung einer expliziten Schranke für den konformen Streckfaktor (Abschnitt 3.5) unter der Voraussetzung $\int |K| < 4\pi$. Hieraus ergeben sich auch andere Anwendungen. In Abschnitt 4.2 erhalten wir analog zum Dirac-Operator explizite obere und untere Schranken an die Eigenwerte des Laplace-Operators auf $\mathbb{T}^2$. Wir beschränken den Durchmesser von $\mathbb{T}^2$ nach oben in Termen der Totalkrümmung $\int |K|$, des Flächeninhalts und der 1-dimensionalen Systole (Korollar 3.6.8), und wir beweisen die isoperimetrischen Ungleichungen von Alexandrov und Fiala–Huber. Die Pinocchio-Metriken aus Abschnitt 3.4 zeigen mit ihren langen Nasen, wieso unsere Abschätzungen für $\int |K| \geq 4\pi$ bez. $\int K^+ \geq 2\pi$ nicht mehr funktionieren.

Kapitel 6 liefert Abschätzungen der Spektren von $\nabla^*\nabla$ und D^2 nach oben und unten in Termen von anderen Größen. Die methodischen Ansätze sind auch verschieden von dem Ansatz der Kapitel 3–5. In Abschnitt 6.1 wird versucht, eine ähnliche Abschätzung wie in Kapitel 5 allgemeiner zu formulieren. Wir erhalten eine Abschätzung für den Zusammenhangs-Laplace $\nabla^*\nabla$, wenn M der Totalraum eines S^1-Bündels ist. Die Dimension des Totalraums ist hierbei beliebig. Abschnitt 6.2 präsentiert eine Abschätzung von $\nabla^*\nabla$ auf $\mathbb{T}^2$. Abschnitt 6.3 erlaubt uns, die Spektren von D^2 zu zwei verschiedenen Spin-Strukturen zu vergleichen und deren Differenz nach oben abzuschätzen, vorausgesetzt die Differenz ist als Differentialform realisierbar.

Kapitel 7 behandelt das Verhalten des Spektrums des Dirac-Operators auf dem Totalraum einer S^1-Faserung, wenn die Fasern kollabieren. Dieses Kapitel wurde bereits in einer weniger allgemeinen Form veröffentlicht [AmB97]. Die Voraussetzung konstanter Faserlänge aus [AmB97] konnte in der vorliegenden Dissertation beseitigt werden.

In Kapitel 8 betrachten wir schließlich isospektrale Deformationen von Nilmannigfaltigkeiten. Auch dieses Kapitel wurde schon in [AmB97] veröffentlicht. Unter anderem geben wir eine Familie von Nilmannigfaltigkeiten an, die für manche Spin-Strukturen isospektral ist, für andere aber nicht.

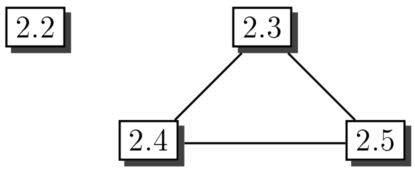
Da manche Abschnitte der Arbeit völlig unabhängig voneinander gelesen werden können, andere wiederum eng aufeinander aufbauen, soll der logische Aufbau der Arbeit im folgenden Flußdiagramm verdeutlicht werden. In diesem Diagramm wird nicht nur dargestellt, wie die Abschnitte logisch aufeinander aufbauen, sondern auch, wie sie sich gegenseitig motivieren. Leser, die nicht an allen Teilen der Arbeit interessiert sind, können somit ablesen, welche Abschnitte für sie von Bedeutung sind.

Legende

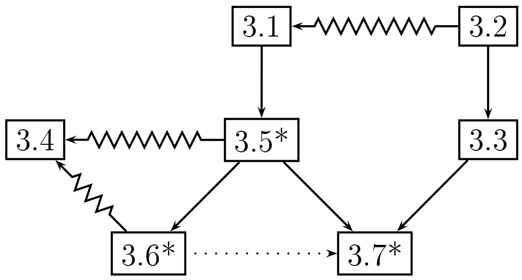
A → B	B benutzt Definitionen und Aussagen aus A
A ·····→ B	B nutzt Aussagen aus A, die aber im folgenden nicht weiter gebraucht werden
A — B	A und B haben inhaltliche Bezüge, sind aber logisch unabhängig
A ←∿∿— B	A motiviert B
1.1*	Ein * kennzeichnet die Abschnitte mit den wichtigsten Ergebnissen

Kapitel 2: Grundlagen

2.1 Alle Abschnitte, deren Rahmen einen Schatten haben, benutzen Definitionen und Aussagen der Spin-Geometrie. Deswegen ist Abschnitt 2.1 Voraussetzung für alle Abschnitte mit Schatten.

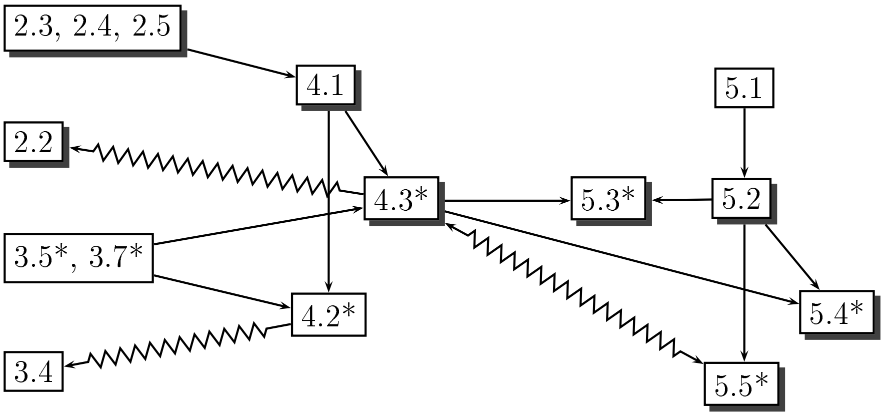


Kapitel 3

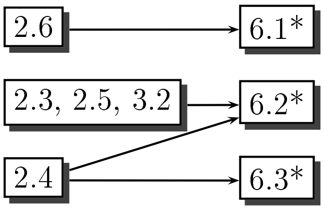


Kapitel 4

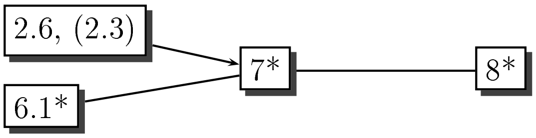
Kapitel 5



Kapitel 6



Kapitel 7 und 8



Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Spin-Geometrie

In diesem Abschnitt wollen wir eine kleine Einführung in die Spin-Geometrie geben und die Notationen dieser Arbeit festlegen. Wir werden jedoch nur die für diese Arbeit wichtigen Definitionen und Resultate anführen. Ein schönes einführendes Lehrbuch ist [Fr97], umfassender ist das Buch [LaM89]. Interessiert man sich mehr für indextheoretische Aspekte der Spin-Geometrie, so sind [Ro88] und [BeGV91] zu empfehlen.

Operiert die Gruppe G_1 von rechts auf A, operiert G_2 von links auf B und ist $H : G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus, dann schreiben wir

$$A \times_H B := \frac{A \times B}{(a \cdot g_1, b) \sim (a, H(g_1) \cdot b) \quad \forall g_1 \in G_1}.$$

Ist H die Identität, so schreiben wir auch einfach $A \times_{G_1} B$. Die Elemente bezeichnen wir mit $[a, b]$, wobei $a \in A$ und $b \in B$. Sind A und B Bündel über einem gemeinsamen Basisraum, so ist $A \times_H B$ faserweise zu verstehen.

Ist (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, so bezeichnen wir das Bündel der positiv orientierten Orthonormalbasen des Tangentialbündels als das *Rahmenbündel* $P_{\mathrm{SO}}(M)$. Dieses Bündel ist ein $\mathrm{SO}(n)$-Hauptfaserbündel.

Ist V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$, so ist die *reelle Clifford-Algebra* $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(V)$ die von V erzeugte Algebra mit Eins über $\mathbb{R}$ mit den Relationen

$$v \cdot w + w \cdot v + 2\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v, w \in V.$$

Die Komplexifizierung $\mathbb{C}\mathrm{l}(V) := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ nennen wir einfach die *Clifford-Algebra* zu V. Wir schreiben auch $\mathbb{C}\mathrm{l}(n) := \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$.

Mit Hilfe der Einbettung $V \hookrightarrow \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(V) \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ identifizieren wir V mit einem Untervektorraum von $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(V)$ bzw. $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$. Jedes $v \in V - \{0\}$ ist invertierbar als Element von $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ mit $v^{-1} = -v/|v|^2$. Die Konjugation $w \mapsto vwv^{-1}$ operiert auf $V \subset \mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ wie eine Spiegelung an der durch v erzeugten Geraden $\operatorname{span} v$. Speziell für $V = \mathbb{R}^n$ erhalten wir somit eine Abbildung $S^n \to \mathrm{O}(n)$.

Die *Spin-Gruppe* $\mathrm{Spin}(n)$ sei nun die multiplikative Untergruppe von $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)^*$, die von Elementen der Form v_1v_2 mit $|v_i| = 1$ erzeugt wird. Konjugation mit v_1v_2 operiert auf $V = \mathbb{R}^n$ als Verkettung zweier Spiegelungen und ist deswegen ein Element von $\mathrm{SO}(n)$. Insgesamt bekommen wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \Theta : \mathrm{Spin}(n) &\to \mathrm{SO}(n) \\ a &\mapsto (v \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}\mathrm{l}(n) \mapsto a \cdot v \cdot a^{-1}), \end{aligned}$$

der eine zweifache, nicht triviale Überlagerung ist. Im Fall $n \geq 3$ ist Θ die universelle Überlagerung.

Eine *Spin-Struktur auf* M ist nun ein Paar $(P_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi)$ bestehend aus einem $\mathrm{Spin}(n)$-Hauptfaserbündel $P_{\mathrm{Spin}}(M)$ und einer Bündelabbildung $\varphi : P_{\mathrm{Spin}}(M) \to P_{\mathrm{SO}}(M)$ über der Identität $\mathrm{id} : M \to M$, so daß

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}}(M) \times \mathrm{Spin}(n) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi \times \Theta"] & P_{\mathrm{Spin}}(M) \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr] & \\ & & M \\ P_{\mathrm{SO}}(M) \times \mathrm{SO}(n) \arrow[r] & P_{\mathrm{SO}}(M) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die horizontalen Pfeile sind hierbei durch die Gruppenoperationen der Hauptfaserbündel definiert. Zwei Spin-Strukturen $(P^1_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi_1)$ und $(P^2_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi_2)$ wollen wir miteinander identifizieren, wenn es eine $\mathrm{Spin}(n)$-äquivariante Bijektion $\beta : P^1_{\mathrm{Spin}}(M) \to P^2_{\mathrm{Spin}}(M)$ gibt mit $\varphi_2 \circ \beta = \varphi_1$.

Spin-Strukturen sind somit zweifache Überlagerungen von $P_{\mathrm{SO}}(M)$, die mit den Gruppenoperationen verträglich und auf jeder Faser nicht-trivial sind.

Nicht alle Mannigfaltigkeiten besitzen eine Spin-Struktur, andere Mannigfaltigkeiten (z. B. die Tori) besitzen mehrere Spin-Strukturen.

Eine Mannigfaltigkeit M besitzt genau dann eine Spin-Struktur, wenn die zweite Stiefel-Whitney-Klasse $w_2(M) = w_2(TM) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ verschwindet. Die Existenz einer Spin-Struktur hängt deswegen nicht von der Riemannschen Metrik ab. Wu Wen-Tsün konnte sogar zeigen, daß die Stiefel-Whitney-Klassen einer kompakten Mannigfaltigkeit nur vom Homotopie-Typ abhängen; hierzu berechnete er die Stiefel-Whitney-Klassen mit Hilfe der Steenrod-Quadrierungsoperation ([LaM89, II.2, Seite 86] und [Mi74, Theorem 11.14]). Mannigfaltigkeiten, die eine Spin-Struktur besitzen, nennen wir *Spin-Mannigfaltigkeiten* bzw. wir sagen die Mannigfaltigkeit sei *spin*.

Beispiele von Spin-Mannigfaltigkeiten sind alle orientierbaren Flächen und alle kompakten orientierbaren 3-Mannigfaltgkeiten [LaM89, Seite 86]. Ferner natürlich alle Mannigfaltigkeiten mit $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = 0$, also z. B. die Sphären S^n mit $n \geq 3$. Der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist genau dann spin, wenn n ungerade ist.

Um die Nicht-Eindeutigkeit der Spin-Struktur zu verdeutlichen, wollen wir als Beispiel den 2-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der Standardmetrik betrachten. Das Rahmenbündel $P_{\mathrm{SO}}(M) = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SO}(2)$ ist ein triviales $\mathrm{SO}(2) = S^1$-Bündel. Für $n = 2$ ist $\Theta : \mathrm{Spin}(2) = S^1 \to \mathrm{SO}(2) = S^1$ die zweifache nicht-triviale Überlagerung. Ist nun $\chi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ ein Gruppen-Homomorphismus, dann ist

$$P^{\chi}_{\mathrm{Spin}}(\mathbb{T}^2) := \mathbb{R}^2 \times_{\chi} \mathrm{Spin}(2) \qquad \varphi := \pi \times \Theta$$

eine Spin-Struktur und für jedes χ erhalten wir eine verschiedene. Hierbei ist π die Projektion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Ist χ der triviale (bzw. ein nicht-trivialer) Homomorphismus, dann nennen wir die Spin-Struktur $P^{\chi}_{\mathrm{Spin}}(\mathbb{T}^2), \varphi$ ebenfalls *trivial* (bzw. *nicht-trivial*). Nicht-triviale Spin-Strukturen auf $\mathbb{T}^2$ werden eine wichtige Rolle in dieser Arbeit spielen. Diese Definition wollen wir in Abschnitt 2.3 verallgemeinern.

Sei M nun wieder eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu jeder Darstellung $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(V)$ von $\mathrm{Spin}(n)$ erhalten wir ein assoziiertes Bündel $P_{\mathrm{Spin}}(M) \times_{\rho} V$. Ist z. B. $\iota : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ die Standarddarstellung, dann gilt

$$TM = P_{\mathrm{Spin}}(M) \times_{\iota \circ \Theta} \mathbb{R}^n.$$

Das *komplexe Volumenelement in* $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ definieren wir als

$$\omega_{\mathbb{C}} := i^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} E_1 E_2 \dots E_n,$$

wobei $(E_i \,|\, i = 1 \dots n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Es gilt ${\omega_{\mathbb{C}}}^2 = 1$. Das komplexe Volumen-Element $\omega_{\mathbb{C}}$ erlaubt uns nun, die irreduziblen komplexen Darstellungen von $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ zu beschreiben.

Ist n gerade, dann gibt es genau eine irreduzible (komplexe) Darstellung von $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$:

$$\gamma : \mathbb{C}\mathrm{l}(n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n).$$

Die Dimension von Σ_n ist $2^{n/2}$. Da $\omega_{\mathbb{C}}$ mit Vektoren antikommutiert, zerfällt $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$ in die Eigenräume von $\omega_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert $+1$ und -1. Beide Eigenräume haben die Dimension $2^{(n-2)/2}$.

Ist n ungerade, dann liegt $\omega_{\mathbb{C}}$ im Zentrum von $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$. Nach dem Lemma von Schur operiert also $\omega_{\mathbb{C}}$ auf jeder irreduziblen Darstellung wie eine Konstante, und zwar wie $+1$ oder wie -1. Aus der Darstellungstheorie von $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ sehen wir, daß es zwei irreduzible Darstellungen gibt, die sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden. Sofern nicht anders angegeben, betrachten wir deswegen in dieser Arbeit nur die Darstellung, für die $\omega_{\mathbb{C}}$ wie $+1$ operiert. Wir schreiben ebenfalls $\gamma : \mathbb{C}\mathrm{l}(n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$. Diesmal hat Σ_n die Dimension $2^{(n-1)/2}$.

Sowohl für ungerade als auch für gerade n trägt Σ_n ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$, bezüglich dessen Clifford-Multiplikation mit Vektoren schief-hermitesch ist, d. h.

$$\langle \gamma(X)s, t\rangle + \langle s, \gamma(X)t\rangle = 0 \qquad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^n \ s, t \in \Sigma_n.$$

Die Darstellung γ nennen wir die *Spinordarstellung*. Die Restriktion von γ auf $\mathrm{Spin}(n)$ liefert eine unitäre Darstellung von $\mathrm{Spin}(n)$. Das assoziierte Bündel heißt *Spinorbündel* $\Sigma M := P_{\mathrm{Spin}}(M) \times_\gamma \Sigma_n$. Die Faser über $m \in M$ bezeichnen wir mit $\Sigma_m M$. Für gerades n sind Σ_n^+ und Σ_n^- invariant unter $\mathrm{Spin}(n)$. Das Spinorbündel zerfällt deswegen in das *positive* und *negative Spinorbündel*

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M = P_{\mathrm{Spin}}(M) \times_\gamma \Sigma_n^+ \oplus P_{\mathrm{Spin}}(M) \times_\gamma \Sigma_n^-.$$

Die Schnitte von ΣM heißen Spinoren, die von $\Sigma^\pm M$ heißen *positive* bzw. *negative Spinoren*.

Die Darstellung $\gamma : \mathbb{C}\mathrm{l}(n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$ induziert eine faserweise Operation des Cliffordbündels $\mathbb{C}\mathrm{l}\, M := \bigcup_{m\in M} \mathbb{C}\mathrm{l}(T_m M)$ auf ΣM, die *Clifford-Multiplikation*, die wir auch mit γ bezeichnen wollen.

Der Levi-Civita-Zusammenhang gibt uns eine Zusammenhangs-1-Form auf $P_{\mathrm{SO}}(M)$, die wir auf $P_{\mathrm{Spin}}(M)$ liften können. Diese wiederum liefert uns einen Zusammenhang $\nabla^{\Sigma M}$ auf ΣM bzw. $\Sigma^\pm M$.

In lokalen Koordinaten hat dieser Zusammenhang die folgende Gestalt: Sei q ein lokaler Schnitt von $P_{\mathrm{Spin}} M$ und $\sigma : U \to \Sigma_n$ eine spinorwertige Funktion, dann ist $[q, \sigma]$ ein lokaler Schnitt des Spinorbündels. Wir bezeichnen nun die Christoffelsymbole bezüglich des Rahmens $\varphi(q) = (e_1, \dots, e_n)$ mit Γ_{ij}^k. Dann gilt

$$\nabla_{e_i}^{\Sigma M}[q, \sigma] = \left[q, \partial_{e_i}\sigma + \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \gamma(E_j)\gamma(E_k)\sigma\right], \tag{2.1.1}$$

wobei wir wieder $(E_i, i = 1 \dots, n)$ für die Standardbasis von $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ schreiben.

Bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle [q, \sigma_1], [q, \sigma_2]\rangle := \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$$

auf ΣM ist dieser Zusammenhang metrisch und die Clifford-Multiplikation mit Vektoren schief-hermitesch.

Sei schließlich W ein komplexes Vektorbündel mit metrischem Zusammenhang ∇^W. Dann ist auch das *getwistete Spinorbündel* $\Sigma M \otimes W$ ein Vektorbündel mit metrischem Zusammenhang $\nabla \otimes \nabla^W$. Die Clifford-Multiplikation operiert auch auf diesem Bündel, indem sie auf die erste Komponente wirkt.

Wir definieren den *getwisteten Dirac-Operator* D^W als Verkettung

$$\Gamma(\Sigma M \otimes W) \stackrel{\nabla^{\Sigma M} \otimes \nabla^W}{\longrightarrow} \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M \otimes W) \to \Gamma(TM \otimes \Sigma M \otimes W) \stackrel{\gamma}{\to} \Gamma(\Sigma M \otimes W),$$

wobei der mittlere Pfeil den von der Metrik induzierten Isomorphismus $T^*M \to TM$ benutzt.

Ist W das triviale Geradenbündel, so heißt $D := D^W$ der *klassische Dirac-Operator* oder, wenn keine Verwechslung möglich ist, einfach *Dirac-Operator*.

Das faserweise Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ induziert ein hermitesches Skalarprodukt $(.,.)$ auf den Schnitten von $\Sigma M \otimes W$. Für dieses Skalarprodukt ist der (getwistete) Dirac-Operator ein selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator und hat deswegen ein reelles diskretes Spektrum. Die zugehörigen Eigenräume sind endlichdimensional. Eigenspinoren zum Eigenwert 0 heißen *harmonische Spinoren*.

Wir wollen nun das Quadrat des klassischen Dirac-Operators mit dem Zusammenhangs-Laplace vergleichen. Hierzu sei $\left(\nabla^{\Sigma M}\right)^* : L^2(T^*M \otimes \Sigma M) \to L^2(\Sigma M)$ der zu $\nabla^{\Sigma M} : L^2(\Sigma M) \to L^2(T^*M \otimes \Sigma M)$ formal adjungierte Differentialoperator. Dann heißt die Verkettung $\left(\nabla^{\Sigma M}\right)^* \nabla^{\Sigma M}$ der *Zusammenhangs-Laplace-Operator* auf ΣM. Bezüglich des Rahmen $(e_1, \ldots, e_n)$ gilt lokal

$$\left(\nabla^{\Sigma M}\right)^* \nabla^{\Sigma M} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\nabla^{\Sigma M}_{e_i} \nabla^{\Sigma M}_{e_i} - \nabla^{\Sigma M}_{\nabla_{e_i} e_i}\right).$$

Um die Notation einfach zu halten, schreiben wir zumeist kurz $\nabla^* \nabla$.

Die Verbindung zum Quadrat des klassischen Dirac-Operators liefert die sogenannte Weitzenböck-Formel:

PROPOSITION 2.1.1 (Lichnerowicz).

$$D^2 = \left(\nabla^{\Sigma M}\right)^* \nabla^{\Sigma M} + \frac{s}{4},$$

wobei s die Skalarkrümmung bezeichnet.

KOROLLAR 2.1.2. *Sei M eine kompakte Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit (klassischem) Dirac-Operator D und Skalarkrümmung $s \geq s_0 = \mathrm{konst} > 0$. Dann gilt für alle Eigenwerte λ von D^2:*

$$\lambda \geq s_0/4.$$

Beweis des Korollars. Sei Ψ ein Eigenspinor zu λ. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lambda(\Psi,\Psi) = (D^2\Psi,\Psi) &= \Big(\big(\nabla^{\Sigma M}\big)^*\nabla^{\Sigma M}\Psi,\Psi\Big) + \Big((s/4)\Psi,\Psi\Big)\\ &= \Big(\nabla^{\Sigma M}\Psi,\nabla^{\Sigma M}\Psi\Big) + \Big((s/4)\Psi,\Psi\Big)\\ &\geq (\Psi,\Psi)s_0/4\end{aligned}$$

2.2 Einige wichtige Spektralabschätzungen

Friedrich konnte die Abschätzung aus Korollar 2.1.2 noch verbessern. Er ersetzte hierbei den bisherigen Zusammenhang $\nabla_X^{\Sigma M}$ durch einen modifizierten Zusammenhang

$$\nabla_X^{\mathrm{mod}} := \nabla_X^{\Sigma M} + \mu\gamma(X) \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Mit einer modifizierten Weitzenböck-Formel bekam er damit den folgenden Satz:

SATZ 2.2.1 (Friedrich, [Fr80]). *Sei M eine kompakte n-dimensionale Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit Dirac-Operator D und Skalarkrümmung $s \geq s_0 =$ konst > 0. Dann gilt für alle Eigenwerte λ von D^2:*

$$\lambda \geq \frac{n}{4(n-1)}s_0.$$

Diese Abschätzung ist scharf in dem Sinne, daß für die runden Sphären sogar Gleichheit gilt. Trägt M zusätzliche Struktur, dann können wir diese Abschätzung verbessern. Für Kähler-Spin-Mannigfaltigkeiten erhalten wir die Abschätzung von Kirchberg:

SATZ 2.2.2 (Kirchberg, [Ki86], [Ki88]). *Es sei M eine kompakte Riemannsche Kähler-Spin-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension m mit Skalarkrümmung $s \geq s_0 =$ konst > 0. Dann gilt für alle Eigenwerte λ von D^2*

$$\begin{aligned}\lambda &\geq \frac{m+1}{4m}\cdot s_0 &\quad &\textit{für ungerades } m\\ \lambda &\geq \frac{m}{4(m-1)}\cdot s_0 &\quad &\textit{für gerades } m\end{aligned}$$

Auch diese Abschätzungen sind scharf: für ungerades m gilt Gleichheit für $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$, und für gerades m gilt Gleichheit für $\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1} \times \mathbb{T}^2$.

Im Fall einer quaternionischen Kähler-Struktur konnten W. Kramer, U. Semmelmann und G. Weingart eine analoge Abschätzung zeigen:

SATZ 2.2.3 ([KrSW97]). *Sei M^{4m} eine kompakte quaternionische Kähler-Spin-Mannigfaltigkeit mit Skalarkrümmung $s > 0$. Dann gilt für alle Eigenwerte λ von D^2*

$$\lambda \geq \frac{m+3}{m+2}\,\frac{s}{4}.$$

Man beachte, daß in diesem Fall s konstant ist, da jede quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeit eine Einstein-Mannigfaltigkeit ist. Diese Abschätzung ist scharf, da Gleichheit für den quaternionisch-projektiven Raum gilt.

Diese Spektralabschätzungen nutzen allerdings nur lokale Informationen der Geometrie.

Christian Bär fand in seiner Dissertation [Bä91] eine Abschätzung für $M = S^2$, die völlig ohne Krümmungsvoraussetzung auskommt. Die Topologie bewirkt also bereits, daß es keine harmonische Spinoren gibt, und liefert eine untere Schranke für $\lambda \cdot \mathrm{area}$.

SATZ 2.2.4 ([Bä92, Theorem 2]). *Auf der S^2 mit beliebiger Metrik g gilt für den kleinsten Eigenwert λ von D^2*

$$\lambda \cdot \mathrm{area}(S^2, g) \geq 4\pi.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn (S^2, g) eine Sphäre konstanter Gaußscher Krümmung ist.

Hier stellt sich natürlich die Frage, ob es auch für andere Mannigfaltigkeiten untere Abschätzungen der Eigenwerte gibt, die von der Topologie abhängen. Betrachten wir zum Beispiel den 2-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^2$ mit einer beliebigen Metrik g. Für die triviale Spin-Struktur besitzt $(\mathbb{T}^2, g)$ harmonische Spinoren. Trägt jedoch $(\mathbb{T}^2, g)$ eine nicht-triviale Spin-Struktur, so gibt es keine harmonischen Spinoren. Eine untere Schranke an das Spektrum von D^2 ist jedoch bisher nicht bekannt. Für den Fall, daß die Totalkrümmung $\int |K| < 4\pi$ erfüllt, werden wir in Abschnitt 4.3 eine derartige Schranke herleiten.

2.3 Spin-Strukturen auf Quotienten von Lie-Gruppen

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst definieren, wann Spin-Strukturen auf einer festen Mannigfaltigkeit, aber zu verschiedenen Metriken zueinander äquivalent sind. Anschließend nutzen wir dies, um eine natürliche Bijektion zwischen den Spin-Strukturen auf einem Quotienten einer Lie-Gruppe $\Gamma\backslash G$ und der Homologie-Gruppe $H_1(\Gamma\backslash G, \mathbb{Z}_2)$ aufzustellen.

Die Inhalte dieses Abschnitts sind im wesentlichen in [AnD97] beschrieben, sind aber seit langem bekannt. In engem Zusammenhang steht auch [BoG92].

Die Spin-Mannigfaltigkeit M trage also zwei Metriken g und $\tilde{g}$. Es gibt nun eine eindeutige Funktion $A : M \to \mathrm{End}(TM)$, so daß für alle $X, Y \in TM$ gilt

$$\begin{aligned} g(A(X), A(Y)) &= \tilde{g}(X, Y), \\ g(A(X), Y) &= g(X, A(Y)). \end{aligned}$$

Dieses A induziert einen Isomorphismus von $\mathrm{SO}(n)$-Hauptfaserbündeln

$$\rho_A : P_{\mathrm{SO}}(M, \tilde{g}) \to P_{\mathrm{SO}}(M, g).$$

Definition 2.3.1. Zwei Spin-Strukturen $(P_{\mathrm{Spin}}(M, \tilde{g}), \tilde{\varphi})$ und $(P_{\mathrm{Spin}}(M, g), \varphi)$ zu den Metriken $\tilde{g}$ und g nennen wir *äquivalent*, wenn ρ_A zu einer Abbildung

$$\tilde{\rho}_A : P_{\mathrm{Spin}}(M, \tilde{g}) \to P_{\mathrm{Spin}}(M, g) \qquad \varphi \circ \tilde{\rho}_A = \rho_A \circ \tilde{\varphi}$$

liftet.

Man sieht leicht, daß dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Für $g = \tilde{g}$ sind zwei Spin-Strukturen genau dann äquivalent, wenn sie gleich im Sinne von Abschnitt 2.1 sind. Ist $(P_{\mathrm{Spin}}(M, \tilde{g}), \tilde{\varphi})$ eine Spin-Struktur auf $(M, \tilde{g})$, dann definiert

$$P_{\mathrm{Spin}}(M, g) := P_{\mathrm{Spin}}(M, \tilde{g}) \qquad \varphi := \rho_A \circ \tilde{\varphi}$$

eine äquivalente Spin-Struktur auf (M, g). Die Rechtsoperation von $\mathrm{Spin}(n)$ auf $P_{\mathrm{Spin}}(M, g)$ ist hierbei gerade die Rechtsoperation auf $P_{\mathrm{Spin}}(M, \tilde{g})$. Eine Spin-Struktur zur Metrik $\tilde{g}$ ist also zu genau einer Spin-Struktur zur Metrik g äquivalent.

Nun sei G eine Lie-Gruppe, Γ eine diskrete Untergruppe und $M = \Gamma \backslash G$. Wir versehen M mit einer Metrik $\tilde{g}$, die einen linksinvarianten Lift auf G hat. Ein linksinvarianter Rahmen trivialisiert das Rahmenbündel $P_{\mathrm{SO}}(M, \tilde{g}) = M \times \mathrm{SO}(n)$. Für jeden Homomorphismus $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}(H_1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) = H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ ist

$$P^{\chi}_{\mathrm{Spin}}(M, \tilde{g}) := G \times_{\chi} \mathrm{Spin}(n) \qquad \varphi := \pi \times \Theta$$

eine Spin-Struktur auf $(M, \tilde{g})$, wobei die Rechtsoperation von $\gamma \in \Gamma$ auf G durch die Linksoperation von γ^{-1} definiert ist, und $\pm 1 \in \mathbb{Z}_2$ durch Multiplikation mit $\pm\,\mathrm{Id}$ auf $\mathrm{Spin}(n)$ operiert.

Umgekehrt können wir zu einer gegebenen Spin-Struktur $P_{\mathrm{Spin}}(M, \tilde{g})$ die Abbildung χ bestimmen: Sei $\gamma : S^1 \to M$ eine Schleife, dann setzen wir $\chi([\gamma]) = 1$, wenn ein linksinvarianter Rahmen auf $P_{\mathrm{Spin}}(M, \tilde{g})$ liftet, und ansonsten $\chi([\gamma]) = -1$. Wir haben also eine Bijektion von $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ in den Raum der Spin-Strukturen auf $(M, \tilde{g})$ definiert.

Nehmen wir nun eine beliebige Metrik g auf $M = \Gamma\backslash G$. Dann sind die Spin-Strukturen auf (M, g) wie oben beschrieben in natürlicher Bijektion mit den Spin-Strukturen auf $(M, \tilde{g})$. Die Spin-Strukturen auf (M, g) stehen deswegen auch in natürlicher Bijektion zu $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ bzw. zu den Homomorphismen $\chi : \Gamma \to \mathbb{Z}$.

Wir nennen die Abbildung χ den *Spin-Homomorphismus* der Spin-Struktur. Ist χ der triviale Homomorphismus, so sagen wir auch, die Spin-Struktur ist *trivial*; andernfalls sprechen wir von einer *nicht-trivialen* Spin-Struktur. Man beachte aber, daß die Definition des Spin-Homomorphismus nur für diskrete Quotienten von Lie-Gruppen sinnvoll ist.

2.4 L^p-Spin-Struktur-Metriken

In diesem Abschnitt definieren wir eine Familie von Metriken auf dem Raum der Spin-Strukturen einer gegebenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Im Gegensatz zum letzten Abschnitt wollen wir jedoch nicht annehmen, daß M ein Quotient einer Lie-Gruppe ist. Wir können deswegen auch nicht $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ mit der Menge aller Spin-Strukturen auf (M, g) identifizieren.

Wir nehmen an, daß $(P^1_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi_1)$ und $(P^2_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi_2)$ zwei Spin-Strukturen zu (M, g) sind. Für eine Schleife $c : S^1 \to P^1_{\mathrm{Spin}}(M)$ setzen wir $v(c) = 1$, wenn $\varphi_1 \circ c : S^1 \to P_{\mathrm{SO}}(M)$ auf $P^2_{\mathrm{Spin}}(M)$ liftet und sonst $v(c) = -1$. Die Fußpunkte von c beschreiben eine Kurve $\bar{c} : S^1 \to M$. Dann ist

$$\begin{aligned} \delta : \pi_1(M) &\to \mathbb{Z}_2 \\ [\bar{c}] &\mapsto v(c) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus

$$\delta \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}_2)) = \mathrm{Hom}(H_1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) = H_1(M, \mathbb{Z}_2)^* = H^1(M, \mathbb{Z}_2).$$

Wir sagen: δ ist die *Differenz* der Spin-Strukturen $P^1_{\mathrm{Spin}}(M)$ und $P^2_{\mathrm{Spin}}(M)$. Man sieht leicht, daß die Spin-Strukturen auf (M, g) einen affinen Raum zum $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ bilden.

Ist M ein Quotient einer Lie-Gruppe, so bestimmt die triviale Spin-Struktur einen Nullpunkt, und die Differenz zum Nullpunkt ist gleich dem in Abschnitt 2.3 definierten Spin-Homomorphismus. Im allgemeinen hat jedoch der Raum der Spin-Strukturen keinen ausgezeichneten Nullpunkt.

Im folgenden sei $\widetilde{M}$ die universelle Überlagerung von M.

LEMMA-DEFINITION 2.4.1. *$\delta \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ heißt* als Differentialform realisierbar*, wenn eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(1) *es gibt eine geschlossene 1-Form ω auf M, so daß*

$$\exp\Bigl(2\pi i \int_\gamma \omega\Bigr) = \delta([\gamma])$$

für alle geschlossenen Wege γ auf M gilt.

(2) *es gibt eine δ-äquivariante Funktion $f : \widetilde{M} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ auf der universellen Überlagerung $\widetilde{M}$.*

(3) *$L_\delta := \widetilde{M} \times_\delta \mathbb{C} \to M$ ist ein topologisch triviales Vektorbündel über M,*

(4) *die erste Chern-Klasse $c_1(L_\delta) \in H_2(M, \mathbb{Z})$ verschwindet,*

(5) *sei $r : H_1(M, \mathbb{Z}) \to H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ die Koeffizientenreduktion modulo 2, dann verschwindet $\delta \circ r : H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$ auf den Torsionselementen von $H_1(M, \mathbb{Z})$*

Ein solches ω bzw. f heißt Realisierung als Differentialform *bzw.* als Stammfunktion.

Die 1-Form $2\omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ hat ganzzahlige Koeffizienten, d. h. sie liegt im Bild von $H^1(M, \mathbb{Z}) \to H^1(M, \mathbb{R})$. Eine weitere geschlossene 1-Form ω' ist genau dann eine Realisierung als Differentialform von δ, wenn $[\omega - \omega'] \in H^1(M, \mathbb{R})$ ganzzahlige Koeffizienten hat.

Beweis von Lemma-Definition.
(2)⇒(1): Die geschlossene 1-Form

$$\omega := \frac{1}{2\pi i}\, d \log f$$

ist invariant unter den Decktransformationen und kann deswegen als 1-Form auf M interpretiert werden. Umkehrung dieses Arguments liefert (1)⇒(2).

(2)⇒(3): Die Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \times \mathbb{C} &\to \widetilde{M} \times \mathbb{C} \\ (m, z) &\mapsto (m, f(m)z) \end{aligned}$$

steigt ab zu einer Trivialisierung $M \times_\delta \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$.

(3)⇒(2): Eine gegebene Trivialisierung $M \times_\delta \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ liften wir zu einer Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \times \mathbb{C} &\to \widetilde{M} \times \mathbb{C} \\ (m, z) &\mapsto (m, \hat{f}(m)z). \end{aligned}$$

Wir setzen $f := \hat{f}/|\hat{f}|$.

(3)⇔(4) ist ein Standardresultat der Theorie der Chern-Klassen (siehe z. B. in Appendix A von [LaM89]).

(1)⇒(5): Ist γ ein Torsionselement in $H_1(M,\mathbb{Z})$, d. h. $n[\gamma]=0$, dann gilt $n\int_\gamma \omega = \int_{n\gamma}\omega = 0$ und somit $\delta([\gamma]) = \exp(2\pi i \int_\gamma \omega) = 1$.

(5)⇒(1): Es verschwinde $\delta_1 := \delta \circ r : H_1(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$ auf den Torsionselementen. Dann können wir δ_1 gemäß dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_1(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[dr, "\delta_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\exp(\pi i\,.\,)"] \\ & \mathbb{Z}_2 \end{tikzcd}$$

liften.

Den Lift δ_2 tensorieren wir über $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{R}$ und erhalten eine Abbildung

$$2\omega : H_1(M,\mathbb{R}) = H_1(M,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Das zugehörige $\omega \in H^1(M,\mathbb{R})$ erfüllt die von uns gewünschten Eigenschaften. □

Wir definieren nun für $p \in [1,\infty]$ die *L^p-Länge* auf $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ durch

$$\begin{aligned} \|\delta\| &:= \inf\left\{ \|\omega\|_{L^p} \;\middle|\; \omega \text{ ist Realisierung von } \delta \text{ als Differentialform} \right\} \\ &= \inf\left\{ (1/2\pi)\|\mathrm{grad} f\|_{L^p} \;\middle|\; f \text{ ist Realisierung von } \delta \text{ als Stammfunktion} \right\}. \end{aligned}$$

Ist δ nicht als Differentialform realisierbar, so hat δ die Länge ∞. Die L^p-Spin-Struktur-Metrik ist definiert durch

$$d_p^{\mathrm{Spin}}\Big(P^1_{\mathrm{Spin}}(M), P^2_{\mathrm{Spin}}(M)\Big) := \|\delta\|,$$

wobei δ die Differenz der beiden Spin-Strukturen ist.

Ist M Quotient einer Lie-Gruppe und sind χ_1 und χ_2 die zugehörigen Spin-Homomorphismen, so schreiben wir auch einfach $d_p^{\mathrm{Spin}}(\chi_1,\chi_2)$.

2.5 Spin-Strukturen von Flächen

In diesem Abschnitt sei M eine Fläche mit Riemannscher Metrik g, mit Orientierung o und Spin-Struktur $(P_{\mathrm{Spin}}(M,o),\varphi)$. Die Metrik g unterdrücken wir in der Notation, da sie im gesamten Abschnitt fix bleiben möge. Auch die Orientierung o werden wir weglassen, sofern dies nicht zu Mißverständnissen führen kann.

Im ersten Teil des Abschnitts geben wir eine alternative Definition einer Spin-Struktur. Diese Definition wird zum einen in Abschnitt 6.2 nützlich sein. Zum andern sehen wir damit, daß unser Begriff „Spin-Struktur" mit dem von Kusner und Schmitt [KuS97] übereinstimmt. Dies werden wir im zweiten Teil nutzen und einige Resultate aus [KuS97] zitieren. Unter anderem werden wir eine quadratische Form auf $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ konstruieren, die die Spin-Struktur charakterisiert.

In einem dritten Teil zeigen wir, daß es eine Spin-Struktur auf der umgekehrt orientierten Fläche $(M, -o)$ gibt, so daß der zugehörige Dirac-Operator dasselbe Spektrum wie der Dirac-Operator auf (M, o) hat.

Um den Zusammenhang zwischen der Spinor-Definition von [KuS97] und unserer Spinor-Definition zu verstehen, wollen wir also zunächst ein Lemma vorausschicken. Wir definieren eine komplexe Struktur J auf M durch die Forderung, daß $(V, J(V))$ für alle normierten V eine positiv orientierte Orthonormalbasis sein soll.

Ferner definieren wir

$$\begin{aligned} \tau_\pm : \mathrm{SO}(2) &\to \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} &\mapsto \exp(\pm t i). \end{aligned}$$

Wir erhalten dann einen kanonischen Isomorphismus $P_{\mathrm{SO}}(M) \times_{\tau_+} \mathbb{C} \to (TM, J)$ von komplexen Geradenbündeln, der $[(e_1, e_2), 1]$ auf e_1 abbildet. Analog erhalten wir $P_{\mathrm{SO}}(M) \times_{\tau_-} \mathbb{C} \cong (TM, -J)$.

LEMMA 2.5.1. *Sei $(P_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi)$ eine Spin-Struktur auf M, dann ist*

$$\begin{aligned} \Phi_\pm : \Sigma^\pm M = P_{\mathrm{Spin}}(M) \times_\gamma \Sigma_2^\pm &\to P_{\mathrm{SO}}(M) \times_{\tau_\mp} \mathbb{C} = (TM, \mp J) \\ [A, v] &\mapsto [\varphi(A), v^2] \end{aligned}$$

wohldefiniert. Außerdem gilt

$$\Phi_\pm(x\Psi) = x^2 \Phi_\pm(\Psi) \in (TM, \mp J) \qquad x \in \mathbb{C}. \tag{2.5.1}$$

Beweis. Ein beliebiges Element von Spin(2) schreibt sich in der Form $\exp(tE_1E_2)$, denn E_1E_2 spannt die Lie-Algebra von Spin(2) auf.

Nun gilt aber

$$\gamma\Big(\exp(tE_1E_2)\Big)|_{\Sigma^\pm} = \exp\Big(t\gamma(E_1E_2)|_{\Sigma^\pm}\Big) = \exp \mp ti.$$

Auf der anderen Seite gilt nach [LaM89, Proposition I 6.2]

$$\Theta_*(E_1E_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cong 2J.$$

Also insgesamt für alle $B \in \mathrm{Spin}(n)$

$$\gamma(B)^2|_{\Sigma^\pm} = \tau_\mp\left(\Theta(B)\right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}[\varphi(AB), v^2] &= \left[\varphi(A)\Theta(B), v^2\right] \\ &= \left[\varphi(A), \tau_\mp\left(\Theta(B)\right) v^2\right] \\ &= \left[\varphi(A), (\gamma(B)v)^2\right],\end{aligned}$$

und somit ist $\Phi_\pm$ wohldefiniert. Gleichung (2.5.1) ist dann offensichtlich. □

Wir haben somit gesehen, daß für festes (M, J) jede Spin-Struktur eine Wurzel des Bündels (TM, J) definiert. Eine *Wurzel* ist hierbei ein Paar (W, Φ), bestehend aus einem komplexen Geradenbündel W und einer Abbildung $\Phi : W \to (TM, J)$, die (2.5.1) erfüllen. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß diese Zuordnung tatsächlich eine Bijektion von der Menge der Spin-Strukturen auf die Menge der Wurzeln von (TM, J) ist. Analoges gilt für $(TM, -J)$. Dies ermöglicht eine andere Definition der Spin-Struktur: eine Spin-Struktur ist eine Wurzel aus (TM, J). Analoges gilt für $(TM, -J)$.

Diese alternative Definition wurde in [KuS97] verwendet, woraus wir jetzt einige Ergebnisse zitieren wollen.

Wir definieren zunächst eine $\mathbb{Z}_2$-wertige quadratische Form

$$q_{\mathrm{Arf}} : H_1(M, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}.$$

Jede Homologieklasse $a \in H_1(M, \mathbb{Z}^2)$ wird von einer Einbettung $c : S^1 \to M$ repräsentiert. Wir setzen $q_{\mathrm{Arf}}(a) := -1$, wenn $(\dot{c}, J(\dot{c})) : S^1 \to P_{\mathrm{SO}}(M)$ auf $P_{\mathrm{Spin}}(M)$ liftet, ansonsten setzen wir $q_{\mathrm{Arf}}(a) = 1$. Natürlich liftet $(\dot{c}, J(\dot{c}))$ genau dann auf $P_{\mathrm{Spin}}(M)$ vermöge φ, wenn $\dot{c}$ vermöge Φ_+ auf $\Sigma^+ M$ liftet.

Theorem 1 von [KuS97] besagt

SATZ 2.5.2. *q_{Arf} ist wohldefiniert und eine quadratische Form, d. h. es gilt für $a_1, a_2 \in H_1(M, \mathbb{Z}_2)$*

$$q_{\mathrm{Arf}}(a_1 + a_2) = q_{\mathrm{Arf}}(a_1) \cdot q_{\mathrm{Arf}}(a_2) \cdot (-1)^{a_1 \cap a_2}, \qquad (2.5.2)$$

wobei $a_1 \cap a_2$ die Schnittzahl mod 2 bezeichnet.

Wir bilden hiermit die Spin-Strukturen bijektiv auf die quadratischen Formen ab. Sind q_1 und q_2 quadratische Formen, so ist $a \mapsto q_1(a)\,(q_2(a))^{-1}$ ein Element von

$$\mathrm{Hom}(H_1(M, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) = H^1(M, \mathbb{Z}_2).$$

Dies ist gerade die Differenz (siehe Abschnitt 2.4) der zu q_1 und q_2 gehörenden Spin-Strukturen.

Mit unserer quadratischen Form läßt sich nun die Arf-Invariante der Spin-Struktur definieren:

$$\mathrm{Arf} := \frac{1}{\sqrt{\# H_1(M, \mathbb{Z}_2)}} \sum_{a \in H_1} q_{\mathrm{Arf}}(a) \in \{-1, +1\}.$$

Weitere Informationen zu q_{Arf} und Arf finden sich in [Pi85]; die dortigen Ergebnisse gelten selbst für nicht-orientierbare Flächen.

Ist $M = \mathbb{T}^2$, so liefert die folgende Proposition einen noch engeren Zusammenhang zwischen q_{Arf} und dem Spinhomomorphismus χ.

PROPOSITION 2.5.3. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \chi(a) &= -q_{\mathrm{Arf}}(a) && \textit{falls } a \neq 0 \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}_2) \\ \chi(a) &= q_{\mathrm{Arf}}(a) = 1 && \textit{falls } a = 0 \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

Beweis. Für $a = 0$ wählen wir als Repräsentanten c eine kleine eingebettete Schleife. Dann liftet $\dot{c}$ nicht auf $P_{\mathrm{Spin}}(\mathbb{T}^2)$, aber ein linksinvarianter Vektor längs c liftet, d. h. $\chi(a) = q_{\mathrm{Arf}}(a) = 1$.

Für $a = 1$ wählen wir c so, daß die Spur eine Unter-Lie-Gruppe ist (d. h. c ist geodätisch bezüglich einer linksinvarianten Metrik auf $\mathbb{T}^2$). Dann ist $\dot{c}$ ein linksinvarianter Vektor längs c. Also gilt

$$\chi(a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{c} \text{ liftet auf } P_{\mathrm{Spin}}(M) \quad \Leftrightarrow \quad q_{\mathrm{Arf}}(a) = -1. \qquad \square$$

KOROLLAR 2.5.4. *Die triviale Spin-Struktur auf $\mathbb{T}^2$ hat Arf-Invariante -1, die nicht-trivialen Spin-Strukturen haben Arf-Invariante 1.*

LEMMA 2.5.5. *Sei M eine Fläche mit Orientierung o und einer festen Riemannschen Metrik. Außerdem seien $(P_{\mathrm{Spin}}(M, o), \varphi)$ und $(P_{\mathrm{Spin}}(M, -o), \varphi_-)$ Spin-Strukturen auf (M, o) und $(M, -o)$ zur gleichen quadratischen Formen q_{Arf}. Die assoziierten Spinorbündel nennen wir $\Sigma(M, o)$ und $\Sigma(M, -o)$. Dann gibt es eine anti-lineare Abbildung*

$$\Sigma(M, o) \to \Sigma(M, -o)$$

die mit dem Dirac-Operator kommutiert.

Ist M kompakt, dann stimmen also die Spektren der zugehörigen Dirac-Operatoren überein.

Das Spektrum des Dirac-Operators hängt in diesem Sinne nur von der M, g und q_{Arf} ab, ist also unabhängig von der Orientierung.

Beweis des Lemmas. Die Abbildung

$$\begin{aligned} U : P_{\mathrm{SO}}(M,o) &\to P_{\mathrm{SO}}(M,-o) \\ (e_1,e_2) &\to (e_1,-e_2) \end{aligned}$$

ist ein Anti-Isomorphismus von S^1-Hauptfaserbündeln, d. h. ein fasertreuer Diffeomorphismus, mit $U(\,.\,s) = U(\,.\,)\bar{s}$ für alle $s \in S^1$. Wenn die zugehörigen Spin-Strukturen zu derselben quadratischen Form q_{Arf} gehören, liftet U zu einem Anti-Isomorphismus

$$\widehat{U} : P_{\mathrm{Spin}}(M,o) \to P_{\mathrm{Spin}}(M,-o).$$

Außerdem erhalten dU und $d\widehat{U}$ die Horizontalräume der Zusammenhangs-1-Form.

Nun definieren wir einen anti-linearen Bündelhomomorphismus

$$\widetilde{U} : \Sigma(M,o) \to \Sigma(M,-o).$$

Wir wählen eine Basis von Σ_2, so daß

$$\gamma(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und setzen

$$\widetilde{U}([A,\sigma]) := [\widehat{U}(A), \gamma(E_2)\bar{\sigma}].$$

Da $\widehat{U}$ ein Anti-Isomorphismus ist und die komplexe Konjugation $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ komplex anti-linear ist, ist $\widetilde{U}$ wohldefiniert. Da $d\widehat{U}$ die Horizontalräume erhält, gilt

$$\nabla_V^{\Sigma(M,-o)} \widetilde{U}(\Psi) = \widetilde{U}\left(\nabla_V^{\Sigma(M,o)} \Psi\right).$$

Die anti-lineare Abbildung

$$\Sigma_2 \to \Sigma_2 \qquad \sigma \mapsto \gamma(E_2)\bar{\sigma}$$

kommutiert sowohl mit $\gamma(E_2)$ als auch mit $\gamma(E_1)$. Also kommutiert auch $\widetilde{U}$ auch mit $\gamma(e_1)$ und $\gamma(e_2)$ und somit mit dem Dirac-Operator.

Und für einen Eigenspinor Ψ von D zum Eigenwert λ gilt dann

$$D\widetilde{U}(\Psi) = \widetilde{U}(D\Psi) = \widetilde{U}(\lambda\Psi) = \bar{\lambda}\widetilde{U}(\Psi). \qquad \square$$

2.6 Wurzeln aus S^1-Bündeln

In diesem Abschnitt sei $\pi : M \to N$ ein S^1-Faserbündel, das jedoch kein S^1-Hauptfaserbündel zu sein braucht.

Wir nennen das S^1-Bündel $\hat{\pi} : \widehat{M} \to N$ eine *Wurzel* von $\pi : M \to N$, wenn es eine zweifache Überlagerung $u : \widehat{M} \to M$ mit $\hat{\pi} = \pi \circ u$ gibt. Diese Definition beinhaltet, daß u über jeder S^1-Faser eine nicht-triviale zweifache Überlagerung ist.

Der Begriff „Wurzel“ wird durch das folgende Lemma motiviert.

LEMMA 2.6.1. *Sei $\pi : M \to N$ ein S^1-Hauptfaserbündel. Dann sind äquivalent:*

(1) *$\pi : M \to N$ hat eine Wurzel im obigen Sinne.*

(2) *Es gibt ein S^1-Hauptfaserbündel $\widehat{\pi} : \widehat{M} \to N$ mit $M = \widehat{M}/\{-1, 1\}$.*

(3) *Das komplexe Geradenbündel $L := M \times_{S^1} \mathbb{C}$ hat eine Wurzel, d. h. es gibt ein komplexes Geradenbündel W mit $W \otimes_{\mathbb{C}} W = L$.*

(4) *Die erste Chern-Klasse $c_1(M) \in H^2(N, \mathbb{Z})$ ist gerade, d. h. $c_1(M) = 2d$ für ein $d \in H^2(N, \mathbb{Z})$.*

Bemerkung. Das Lemma liefert eine weitere Möglichkeit, Spin-Strukturen auf einer Fläche M zu definieren: eine Spin-Struktur ist eine Wurzel aus $P_{\mathrm{SO}}(M)$.

Beweis. (2)⇒(1) ist offensichtlich; für (1)⇒(2) verkette man zunächst die S^1-Operation mit $S^1 \xrightarrow{\wedge 2} S^1, z \mapsto z^2$ und lifte diese nicht freie S^1-Operation auf M zu einer freien S^1-Operation auf $\widehat{M}$.

(2)⇔(3) folgt mit $W := \widehat{M} \times_{S^1} \mathbb{C}$ bzw. $\widehat{M} := \left\{ v \in W \,\middle|\, |v| = 1 \right\}$.

(3)⇔(4): [LaM89, Example A.5] □

Für beliebige S^1-Bündel gilt die folgende Proposition, die in Abschnitt 6.1 und Abschnitt 7.3 eingehen wird.

PROPOSITION 2.6.2. *Sei $\pi : M \to N$ ein S^1-Faserbündel. Dann hat $\pi : M \to N$ genau dann eine Wurzel, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ gibt, so daß die Verkettung*

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2 \tag{2.6.1}$$

surjektiv ist.

Beweis. $M \to N$ habe eine Wurzel. Dann gibt es eine zweifache Überlagerung $u : \widehat{M} \to M$ mit den obigen Eigenschaften. Sei nun $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ der Verbindungs-Homomorphismus der langen exakten Homotopie-Sequenz des $\mathbb{Z}_2$-Bündels $\widehat{M} \to M$, d. h. $[\gamma] \in \pi_1(M)$ wird genau dann auf $-1 \in \mathbb{Z}_2$ abgebildet, wenn die Schleife γ nicht auf $\widehat{M}$ liftet. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$1 \to \pi_1(\widehat{M}) \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2 \to 1.$$

Die Verkettung (2.6.1) ist surjektiv, da die einfach durchlaufene Faser von $M \to N$ nicht auf $\widehat{M}$ liftet.

Sei andererseits $h : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ ein surjektiver Homomorphismus und $\widetilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung, dann setzen wir $\widehat{M} := \widetilde{M}/\mathrm{Kern}\, h$. Oder in anderen Worten: wir setzen $\widehat{M} := \widetilde{M} \times_h \mathbb{Z}_2$. Nehmen wir nun an, daß nicht nur h sondern sogar $h \circ i_\#$ surjektiv ist, dann können wir folgern, daß $\widehat{M} \to N$ ein S^1-Bündel ist. □

PROPOSITION 2.6.3. *Hat $M \to N$ eine Wurzel und ist M orientierbar und spin, so gibt es mindestens 2 Spin-Strukturen $P^1_{\mathrm{Spin}}(M)$ und $P^2_{\mathrm{Spin}}(M)$ auf M, so daß die zugehörigen Spinorbündel $\Sigma^1 M$ und $\Sigma^2 M$ längs der S^1-Fasern verschiedene Holonomien haben.*

Beweis. Sei $P^1_{\mathrm{Spin}}(M)$ eine Spin-Struktur auf M. Wie im letzten Beweis betrachten wir $\widehat{M} = \widetilde{M} \times_h \mathbb{Z}_2$ als $\mathbb{Z}_2$-Bündel über M. Auf $P^1_{\mathrm{Spin}}(M)$ operiert $\mathbb{Z}_2$ vermöge $\pm\,\mathrm{Id}$. Wir setzen nun

$$P^2_{\mathrm{Spin}}(M) := P^1_{\mathrm{Spin}}(M) \times_{\mathbb{Z}_2} \widehat{M}.$$

Man sieht sofort, daß sich die Holonomien dieser beiden Spin-Strukturen längs der S^1-Fasern von $M \to N$ um $-\,\mathrm{Id}$ unterscheiden. □

Beispiel 1. Sei $\pi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^{n-1}$, die Projektion, die die letzte Komponente von $\mathbb{T}^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ „vergißt". Dann besitzt π eine Wurzel $\hat{\pi} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^{n-1}$.

Allgemeiner sei $\pi : N \times S^1 \to N$ die Projektion auf die erste Komponente, dann besitzt π eine Wurzel.

Beispiel 2. Wir setzen für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Mat}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{H}_3 & := & \{\mathrm{Mat}(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ \Gamma_k & := & \{\mathrm{Mat}(x,y,z) \mid x,y \in \mathbb{Z},\, z \in (1/k)\mathbb{Z}\}\,. \end{array}$$

Wir nennen $M_k := \Gamma_k \backslash \mathcal{H}_3$ *Heisenberg-Mannigfaltigkeit.* „Weglassen" der z-Komponente definiert ein S^1-Hauptfaserbündel

$$\pi_{(k)} : M_k \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2.$$

Die erste Chern-Zahl dieses Bündels ist $k \in H^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Deswegen besitzt $\pi_{(k)}$ für ungerades k keine Wurzel, und für gerades $k = 2m$ ist $\hat{\pi} := \pi_{(m)}$ eine Wurzel.

Beispiel 3. Auf der Einheitssphäre $S^{2q+1} \subset \mathbb{C}^{q+1}$ operiert $S^1 \subset \mathbb{C}$ durch komplexe Multiplikation. Der Quotient $h_q : S^{2q+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^q$ ist ein S^1-Bündel, die sogenannte

Hopf-Faserung. Da es auf S^{2q+1} nur eine Spin-Struktur gibt, können wir mit der obigen Proposition schließen, daß die Hopf-Faserung keine Wurzel hat. Tatsächlich ist $c_1(h_q) = -1 \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^q, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Kapitel 3

Konforme Strukturen auf 2-Tori

3.1 Einführung

In diesem Kapitel nutzen wir konforme Methoden, um Aussagen über Riemannsche Metriken auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2$ und auf der abgeschlossenen Kreisscheibe zu zeigen. Für das Verständnis dieses Kapitels werden **keine** Kenntnisse über Spin-Geometrie benötigt. Das einzige Spin-Objekt dieses Kapitels ist der Spin-Homomorphismus χ, der hier nur die Rolle eines fest gegebenen Homomorphismus $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_2$ hat.

Definition. Seien g und $\tilde{g}$ zwei Riemannsche Metriken auf dem 2-Torus und $\chi, \tilde{\chi} : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ zwei Spin-Homomorphismen.

(1) Die Metriken g und $\tilde{g}$ heißen (*punktweise*) *konform*, wenn es eine Funktion $u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ gibt mit $g = e^{2u}\tilde{g}$;

(2) Die Metriken g und $\tilde{g}$ heißen *konform äquivalent*, wenn es einen Diffeomorphismus $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ gibt, so daß g und $F^*\tilde{g}$ punktweise konform sind;

(3) Die Paare (g, χ) und $(\tilde{g}, \tilde{\chi})$ heißen *spin-konform äquivalent*, wenn es einen Diffeomorphismus $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ gibt, so daß g und $F^*\tilde{g}$ punktweise konform sind und $\chi = \tilde{\chi} \circ F_\#$ gilt.

Die konformen Äquivalenzklasse von g aus (2) nennen wir auch die durch g definierte *konforme Struktur* auf $\mathbb{T}^2$, die spin-konforme Äquivalenzklasse von (g, χ) die durch (g, χ) definierte *spin-konforme Struktur*.

Sei also $g = e^{2u}\tilde{g}$, dann gilt nach [Be87, 1.159] für die Gaußschen Krümmungen K_g

und $K_{\tilde{g}}$

$$K_g - e^{-2u} K_{\tilde{g}} = \Delta_g u = e^{-2u} \Delta_{\tilde{g}} u. \tag{3.1.1}$$

wobei Δ_g bzw. $\Delta_{\tilde{g}}$ der (positiv definite) Laplace-Operator zu g bzw. $\tilde{g}$ ist.

Nach dem Uniformisierungssatz (z. B. [Jo97] Theorem 4.1.1) ist jede Metrik g auf $\mathbb{T}^2$ konform zu einer flachen Metrik. Man sieht dies aber auch mit dem folgenden einfachen Argument: sei u ein Lösung von $\Delta_g u = K_g$, dann ist nach obiger Formel $\tilde{g} := e^{-2u} g$ flach.

In diesem und den beiden nachfolgenden Kapiteln sei nun $\tilde{g}$ immer eine flache, zu g konforme Metrik. Die zugehörige Funktion u nennen wir die *Streckungsfunktion* von g. Sie ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. Deswegen ist die Oszillation $\operatorname{osc} u = \max u - \min u$ eine Invariante der Metrik g.

Ziel dieses Kapitels ist, $\operatorname{osc} u$ durch geometrische Größen abzuschätzen. Mit Hilfe dieser Abschätzung werden wir dann in Kapitel 4 das Spektrum des Laplace- und des Dirac-Operators abschätzen und schließlich in Kapitel 5 das Willmore-Integral nach unten abschätzen.

Wir suchen also eine obere Schranke für die Oszillation von Lösungen der Differentialgleichung

$$e^{2u} K_g = \Delta_{\tilde{g}} u \tag{3.1.2}$$

zu vorgegebener Funktion K_g. Dieses Problem wurde von Brezis und Merle in [BrM91] bereits studiert, allerdings jedoch nicht für Funktionen u auf $\mathbb{T}^2$, sondern für Funktionen u auf einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ unter der Randbedingung $u|_{\partial G} \equiv 0$. Falls

$$\underbrace{\left\| K_g \right\|_{L^p(G,\tilde{g})}}_{C_1} \underbrace{\left\| e^{2u} \right\|_{L^q(G,\tilde{g})}}_{C_2} < \frac{2\pi}{q} \qquad 1 < p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gilt, konnten sie zeigen, daß $\operatorname{osc} u$ durch eine Konstante nach oben beschränkt ist, die nur von C_1, C_2 und G abhängt. Für $p = \infty$ ergibt sich daraus eine obere Schranke an $\operatorname{osc} u$, die nur von $\max |K_g|$, dem Flächeninhalt von (G, g) und dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ abhängt, vorausgesetzt, daß $\operatorname{area}(G, g) \max |K_g| < 2\pi$.

Wir werden die Differentialgleichung jedoch mit einem völlig verschiedenen Ansatz behandeln. Unsere Methode beruht im wesentlichen darauf, die Höhenlinien der Funktion u zu untersuchen. Anstelle von C_1 und C_2 nutzen wir die geometrisch besser zu interpretierenden Größen $\|K_g\|_{L^p(\mathbb{T}^2,g)}$ und $\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g)$, wir integrieren also mit dem Volumenelement von g und nicht mit dem von $\tilde{g}$. Durch Einbeziehen der Systole können wir u auch auf $\mathbb{T}^2$ beschränken und nicht nur auf Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Die Schranke, die wir erhalten, ist zudem explizit gegeben.

Zunächst definieren wir in Abschnitt 3.2 einige Invarianten Riemannscher Spin-Mannigfaltigkeiten, die uns bis Kapitel 5 begleiten werden. In Abschnitt 3.3 behandeln wir die Modulräume konformer und spin-konformer Strukturen. Anschließend, in Abschnitt 3.4, konstruieren wir einige wichtige Beispiele, die Pinocchio- und Kegel-Metriken, die aufzeigen, unter welchen Bedingungen wir eine Schranke an $\operatorname{osc} u$ bekommen können. Die Oszillation der Streckungsfunktion u wird dann in Abschnitt 3.5 abgeschätzt. Abschnitt 3.6 geht in eine etwas andere Richtung: dieser Abschnitt behandelt einige Anwendungen unserer Methoden, die wir für die folgenden Spektralabschätzungen nicht benötigen werden, die aber als eigenständige Resultate ganz interessant sind. Anschließend, in Abschnitt 3.7, kommen wir wieder auf die Invarianten aus Abschnitt 3.2 zurück und schätzen die Daten der konformen und spin-konformen Struktur ab.

Eine interessante Arbeit, die auch Krümmung von Flächen unter konformer Änderung der Metrik untersucht, ist [KaW74]. Sie wird aber im folgenden nicht benutzt werden.

3.2 Invarianten für Riemannsche 2-Tori

Ziel dieses Abschnitts ist die Einführung einiger Invarianten von 2-dimensionalen Tori. Die Invarianten hängen teilweise von der Riemannschen Struktur, teilweise aber auch nur von der konformen Struktur ab. Manche dieser Invarianten hängen zusätzlich von der Spin-Struktur des Torus ab. Wir werden diese Invarianten bis Kapitel 5 häufig benötigen.

Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subset \pi_1(M)$ eine Teilmenge, die unter Konjugation abgeschlossen ist. Wir identifizieren die freie Homotopieklassen $[c]_{\text{frei}}$ einer geschlossenen Kurve $c : S^1 \to M$ mit der entsprechenden Konjugationsklassen in $\pi_1(M)$.

Dann nennen wir

$$\Gamma\text{-}\mathrm{sys}_1(M, g) := \min\left\{\text{Länge}_g(c) \,\middle|\, [c]_{\text{frei}} \not\subset \Gamma\right\}$$

die Γ-*Systole* von (M, g). Aufgrund der Kompaktheit von M wird das Minimum tatsächlich angenommen. Wir sagen, die Kurve c *repräsentiert* $\Gamma\text{-}\mathrm{sys}_1(M, g)$, wenn das Minimum für c angenommen wird.

Enthält Γ nur das neutrale Element e, so ist $\Gamma\text{-}\mathrm{sys}_1(M, g)$ die Länge der kürzesten nicht null-homotopen Kurve. Wir nennen $\{e\}\text{-}\mathrm{sys}_1(M, g)$ in Übereinstimmung mit der Literatur auch einfach die *(1-dimensionale) Systole* $\mathrm{sys}_1(M, g)$. Ist M der 2-Torus $\mathbb{T}^2$, so verwenden wir auch die Notation $\ell_1(g) := \mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g)$.

Ist Γ ein Normalteiler, dann ist Γ-$\mathrm{sys}_1(M, g)$ gerade die Systole von $\widetilde{M}/\Gamma$, wobei $\widetilde{M}$ die universelle Überlagerung von M bezeichne. Für $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ gilt Γ_1-$\mathrm{sys}_1(M, g) \leq \Gamma_2$-$\mathrm{sys}_1(M, g)$.

Für den Fall, daß M der 2-Torus $\mathbb{T}^2$ ist, machen wir noch weitere Definitionen. Wir wählen eine Kurve c_1, die $\ell_1(g) = \mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g)$ repräsentiert. Sei $\langle [c_1] \rangle \subset \pi_1(\mathbb{T}^2)$ die von der Homotopieklasse $[c_1]$ erzeugte Untergruppe. Dann definieren wir die *Zweiterzeuger-Länge*

$$\ell_2(g) := \langle [c_1] \rangle\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g).$$

Wie man anhand des quadratischen flachen Torus sieht, hängt die Untergruppe $\langle [c_1] \rangle$ ab von der Wahl von c_1. A priori könnte also auch die Definition von $\ell_2(g)$ von dieser Wahl abhängen. In Lemma 3.2.4 werden wir aber zeigen, daß $\ell_2(g)$ von der Wahl von c_1 unabhängig ist. Proposition 3.2.5 (1) impliziert auch, daß die Klasse eines Repräsentanten c_2 von $\ell_2(g)$ zusammen mit $[c_1]$ ein Erzeugendensystem von π_1 definiert. Flache Tori werden durch Volumen, Systole und Zweiterzeuger-Länge eindeutig charakterisiert.

Weiter definieren wir für einen Repräsentanten c_1 von $\ell_1(g)$ und dazugehörigen Repräsentanten c_2 von $\ell_2(g)$

$$\ell_3(g) := \Big(\langle [c_1] \rangle \cup \langle [c_2] \rangle\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g).$$

Auch $\ell_3(g)$ ist nach Lemma 3.2.4 unabhängig von c_1 und c_2. Flache Tori werden durch ℓ_1, ℓ_2 und ℓ_3 charakterisiert.

Der Torus $\mathbb{T}^2$ trage nun eine Spin-Struktur, die durch den Spin-Homomorphismus $\chi : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{Z}_2$ beschrieben wird (siehe Abschnitt 2.3). Wir wollen in diesem Zusammenhang annehmen, daß die Spin-Struktur und somit χ nicht trivial ist. Dann ist die *Spin-Systole* definiert als

$$\text{spin-}\mathrm{sys}_1(g, \chi) := (\ker \chi)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g).$$

Sei c ein Repräsentant von $(\ker \chi)$-$\mathrm{sys}_1(M, g)$. Dann sei

$$\text{spin-}\ell_2(g, \chi) := \Big(\langle [c] \rangle \cup \ker \chi\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g)$$

die *Spin-Zweiterzeuger-Länge*. Proposition 3.2.5 (2) zeigt, daß die Klasse eines Repräsentanten von spin-$\ell_2(g, \chi)$ zusammen mit der Klasse eines Repräsentanten c von spin-$\mathrm{sys}_1(g, \chi)$ ein Erzeugendensystem von π_1 definiert. Der Spin-Homomorphismus χ nimmt auf beiden Erzeugern den Wert -1 an. Flache Tori und ihre Spin-Struktur werden durch Volumen, Spin-Systole und Spin-Zweiterzeuger-Länge eindeutig charakterisiert.

Wir benutzen einige wohlbekannten Tatsachen, die wir in der folgenden Proposition zusammenfassen wollen. Leider kenne ich keine Quelle, in der diese Proposition in dieser Form bewiesen wird. Leser, die sich für die historischen Ursprünge der Aussagen interessieren, seien auf [FrHS82] und [Mo24] verwiesen.

PROPOSITION 3.2.1. *Der 2-Torus $\mathbb{T}^2$ trage eine beliebige Metrik g. Sei $c\colon S^1 \to \mathbb{T}^2$ eine kürzeste geschlossene Kurve in der freien Homotopieklasse $a \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$. Dann gilt:*

(1) *Ist a primitiv, d. h. es gibt kein $n \geq 2$ und $b \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$ mit $a = b^n$, dann ist c injektiv, also eine einfach geschlossene Kurve.*

(2) *Ist a nicht primitiv, also $a = b^n$ mit $n \geq 2$, dann ist c eine n-fach durchlaufene kürzeste geschlossene Kurve in der Homotopieklasse b.*

Aus Aussage (2) der Proposition folgt unmittelbar ein Korollar.

KOROLLAR 3.2.2. *Ist Γ die Vereinigung von Untergruppen von $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ und c ein Repräsentant von $\Gamma\text{-sys}_1(\mathbb{T}^2, g)$, dann ist $[c]$ primitiv. Unter anderem sind die Homotopieklassen der Repräsentanten von $\ell_1(g) = \mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g)$, $\ell_2(g)$, $\ell_3(g)$, $\text{spin-sys}_1(g, \chi)$ und $\text{spin-}\ell_2(g, \chi)$ primitiv.*

Beweis von Proposition 3.2.1. Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der Überlagerungsmetrik $\hat{g}$. Wir setzen $Z_a := \mathbb{R}^2/\langle a \rangle$. Seien c_1 und c_2 zwei Repräsentanten von $\mathrm{sys}_1(Z_a, \hat{g})$. Entweder sind c_1 und c_2 disjunkt, identisch (bis auf Orientierung) oder sie schneiden sich transversal. Im letzten Fall sieht man mit einem Schnittzahl-Argument, daß es mindestens zwei Schnittpunkte gibt, und konstruiert dann aus c_1 und c_2 eine kürzere, nicht null-homotope Kurve in Z_a, was der minimalen Länge von c_1 und c_2 widerspricht. Also sind Repräsentanten von $\mathrm{sys}_1(Z_a, \hat{g})$ disjunkt oder identisch (bis auf Orientierung).

Zum Beweis von (1) nehmen wir an, daß c nicht injektiv ist. Wir liften c auf Z_a. Dieser Lift $\hat{c}$ repräsentiert $\mathrm{sys}_1(Z_a, \hat{g})$. Aufgrund seiner minimalen Länge ist $\hat{c}$ injektiv. Da aber c nicht injektiv ist, gibt es ein $d \in \pi_1(\mathbb{T}^2) - \langle a \rangle$, so daß sich $\hat{c}$ und $d\hat{c}$ schneiden. Nach dem oben Bewiesenen sind dann aber $\hat{c}$ und $d\hat{c}$ identisch. Also sind d und a kollinear. Wegen $d \notin \langle a \rangle$ ist dann aber a nicht primitiv.

Zum Beweis von (2) betrachten wir die Operation von b auf Z_a. Nach dem Jordanschen Kurvensatz teilt $\hat{c}$ den topologischen Zylinder Z_a in zwei Zusammenhangskomponenten Z_1 und Z_2. Sind $b\hat{c}$ und $\hat{c}$ disjunkt, dann ist o. E. bZ_1 eine echte Teilmenge von Z_1. Hieraus würde folgen, daß $b^n Z_1 = Z_1$ eine echte Teilmenge von sich selbst ist, also ein Widerspruch. Also schneiden sich $\hat{c}$ und $b\hat{c}$, sie sind also nach dem oben Gezeigten identisch. Hieraus folgt die Behauptung. □

Genau wie in (2) zeigt man auch das folgende Lemma. Im Gegensatz zu Proposition 3.2.1 fordern wir nicht, daß c eine Kürzeste in der freien Homotopieklasse sei.

LEMMA 3.2.3. *Ist $c : S^1 \to \mathbb{T}^2$ eine injektive, nicht null-homotope Kurve, so ist $[c]$ primitiv, d. h. es gibt kein $a \in \pi_1$ und $n \geq 2$ mit $[c] = a^n$.*

LEMMA 3.2.4.

(1) *Die Definition von $\ell_2(g)$ hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten c_1 ab. Und es gilt*
$$\ell_2(g) = \max_{\gamma \in \pi_1} \langle \gamma \rangle\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g).$$

(2) *Die Definition von $\ell_3(g)$ hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten c_2 ab. Und es gilt*
$$\ell_3(g) = \max_{\gamma \in \pi_1} \Big(\langle \gamma \rangle \cup \langle [c_1] \rangle\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g).$$

(3) *Die Definition von* spin-$\ell_2(g, \chi)$ *hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten c ab. Und es gilt*
$$\text{spin-}\ell_2(g, \chi) = \max_{\gamma \in \pi_1} \Big(\langle \gamma \rangle \cup \ker \chi\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g).$$

Beweis von Lemma 3.2.4. Sei c ein Repräsentant von Γ-$\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g)$ und Γ eine Vereinigung von Untergruppen.

Wir zeigen hier, daß für alle $a \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$ gilt
$$\Big(\langle a \rangle \cup \Gamma\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g) \leq \Big(\langle [c] \rangle \cup \Gamma\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g).$$

Für $\Gamma = \{e\}$ folgen daraus die Aussagen von (1), für $\Gamma = \langle c_1 \rangle$ die Aussagen von (2) und für $\Gamma = \ker \chi$ die Aussagen von (3).

Sei also $a \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$ gegeben. Im Fall $[c] \notin \langle a \rangle$ folgt $[c] \notin \langle a \rangle \cup \Gamma$ und somit
$$\Big(\langle a \rangle \cup \Gamma\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g) \leq \text{Länge}_g(c) = \Gamma\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g) \leq \Big(\langle [c] \rangle \cup \Gamma\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g).$$

Betrachten wir nun den Fall $[c] \in \langle a \rangle$. Nach Korollar 3.2.2 ist $[c]$ primitiv, also gilt dann $[c] = a^{\pm 1}$. Hieraus folgt:
$$\Big(\langle a \rangle \cup \Gamma\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g) = \Big(\langle [c] \rangle \cup \Gamma\Big)\text{-}\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g). \qquad \square$$

Bemerkungen

(1) Auf $\mathbb{T}^2 \times S^2$ gibt es Riemannsche Metriken, so daß die Systole sowohl durch Kurven mit primitiver Homotopieklasse, als auch durch Kurven mit nicht primitiver Homotopieklasse repräsentiert werden kann. Die Definition eines analog

definierten ℓ_2 hängt hierbei von der Wahl des Repräsentanten der 1-Systole sys_1 ab.
Eine derartige Metrik kann zum Beispiel als „Autobahnmetrik“ konstruiert werden. Dazu wählen wir nun eine primitive Homotopieklasse $[c_1]$, die von einer einfach geschlossenen Kurve c_1 repräsentiert wird. Nun wählen wir eine einfach geschlossene Kurve c_1', die die Homotopieklasse $2[c_1]$ repräsentiert und die die Kurve c_1 nicht schneidet. Anschließend machen wir die Metrik g mit der Technik der Autobahnmetriken in der Umgebung von c_1 und c_1' geeignet klein, so daß c_1 und c_1' Geodäten sind und

$$\text{Länge}_g(c_1) = \text{Länge}_g(c_1') = \mathrm{sys}_1\big(\mathbb{T}^2, g\big)$$

gilt. Der Autor hat diese Technik in [Am97] („expressway metrics“) skizziert und in [Am94] sehr ausführlich vorgestellt.

(2) Korollar 3.2.2 zeigt auch, daß $\ell_1(g) \leq \ell_2(g) \leq \ell_3(g)$ der Anfang des „primitiven Längenspektrums“ ist ([He91]), d. h. $\ell_1(g)$, $\ell_2(g)$ und $\ell_3(g)$ sind die Längen der 6 kürzesten nicht-trivialen primitiven Homotopieklassen, wobei jede dieser 3 Längen doppelt angenommen wird (von a und a^{-1}).

PROPOSITION 3.2.5.

(1) *Sei c_1 ein Repräsentant von $\ell_1(g)$ und c_2 ein dazu passender Repräsentant von $\ell_2(g)$. Dann bilden $[c_1]$ und $[c_2]$ ein Erzeugendensystem von π_1.*

(2) *Sei c_1 ein Repräsentant von* $\text{spin-sys}_1(g,\chi)$ *und c_2 ein dazu passender Repräsentant von* $\text{spin-}\ell_2(g)$*. Dann bilden $[c_1]$ und $[c_2]$ ein Erzeugendensystem von π_1.*

Beweis. Wir wissen bereits, daß für (1) und (2) sowohl $[c_1]$ als auch $[c_2]$ primitiv ist. Um zu zeigen, daß sie sogar ein Erzeugendensystem bilden, ist noch zu zeigen, daß die Schnittzahl von c_1 mit c_2 entweder 1 oder -1 ist. Hierzu sei n der Betrag der Schnittzahl. Die Schnittzahl ist ungleich Null, weil c_1 primitiv ist und $[c_2] \notin \langle [c_1] \rangle$ gilt.

Wir zeigen $n = 1$ zunächst für (1). Hierzu nehmen wir an, daß $n \geq 2$ sei. Da $[c_1]$ primitiv ist, finden wir ein e_2 in π_1, so daß $[c_1]$ und e_2 ein Erzeugendensystem bilden. Wir definieren nun den Torus

$$Q := \mathbb{R}^2/G,$$

wobei G das von $[c_1]$ und $[c_2]$ erzeugte Gitter ist. Da G als Untergruppe von $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ Index n hat, ist die natürliche Abbildung $Q \to \mathbb{T}^2$ eine n-fache Überlagerung und die Operation von e_2 auf Q erzeugt die zyklische Gruppe der Decktransformationen. Seien $\hat{c}_1$ und $\hat{c}_2$ Lifte von c_1 und c_2 auf Q.

Das Urbild von $c_1(S^1)$ unter der Abbildung $Q \to \mathbb{T}^2$ ist

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} {e_2}^i \hat{c}_1(S^1) \subset Q.$$

Die Schnittzahl von $\bigcup_{i=0}^{n-1} {e_2}^i \hat{c}_1$ mit $\hat{c}_2$ ist gleich der Schnittzahl von c_1 mit c_2, also gleich $\pm n$. Da ${e_2}^i \hat{c}_1$ homotop zu ${e_2}^j \hat{c}_1$ ist, haben also ${e_2}^i \hat{c}_1$ und $\hat{c}_2$ Schnittzahl ± 1. Es gibt also $t_1, t_2 \in S^1$ mit $\hat{c}_2(t_1) \in \hat{c}_1(S^1)$ und $\hat{c}_2(t_2) \in e_2 \hat{c}_1(S^1)$.

Wir schreiben nun etwas salopp $]t_1, t_2[$ für die Zusammenhangskomponente von $S^1 - \{t_1, t_2\}$, in der $t_1 + \varepsilon$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ liegt, und $[t_1, t_2]$ für deren Abschluß in S^1. Mit dieser Notation sind $\hat{c}_2|_{[t_1,t_2]}$ und $\hat{c}_2|_{[t_2,t_1]}$ geodätische Segmente von $\hat{c}_2(t_1)$ nach $\hat{c}_2(t_2)$. Für deren Länge gilt

$$\text{Länge}_g(\hat{c}_2|_{[t_1,t_2]}) + \text{Länge}_g(\hat{c}_2|_{[t_2,t_1]}) = \text{Länge}_g(\hat{c}_2).$$

Es gibt somit ein $j \in \mathbb{Z} \bmod 2$, so daß

$$\text{Länge}_g(\hat{c}_2|_{[t_j,t_{j+1}]}) \leq (1/2)\,\text{Länge}_g(\hat{c}_2) = (1/2)\,\ell_2(g).$$

Nun betrachten wir wieder Kurven auf $\mathbb{T}^2$. Das geodätische Segment $c_2|_{[t_j,t_{j+1}]}$ können wir nun durch ein Segment von c_1 zu einer geschlossenen Kurve c_2' machen. Mit einer ähnlichen Argumentation wie oben, können wir annehmen, daß dieses Segment von c_1 höchstens die Länge

$$(1/2)\,\text{Länge}_g(\hat{c}_1) = (1/2)\,\text{sys}_1\Big(\mathbb{T}^2, g\Big)$$

hat. Die geschlossene Kurve c_2' hat also die Länge

$$\text{Länge}_g(c_2') \leq (1/2)\,\ell_2(g) + (1/2)\,\text{sys}_1\Big(\mathbb{T}^2, g\Big) \leq \ell_2(g).$$

Für die Homotopieklasse von c_2' gilt $[c_2'] \in {e_2}^{\pm 1} \cdot G$, also $[c_2] \notin \langle [c_1] \rangle$. Die Kurve c_2' besteht aus zwei geodätischen Bögen von $c_2(t_1)$ nach $c_2(t_2)$ und hat in diesen beiden Punkten Ecken. Runden wir diese Ecken ein bißchen ab, so erhalten wir eine Kurve, die kürzer als $\ell_2(g)$ ist und deren Homotopieklasse nicht in $\langle [c_1] \rangle$ liegt. Dies widerspricht aber der Definition von $\ell_2(g)$. Wir erhalten also Behauptung (1).

Für den Beweis von (2) können wir ähnlich vorgehen, aber nicht völlig gleich, da wir nicht wissen, ob $\chi([c_2']) \neq 1$. Wir benötigen deswegen einige zusätzliche Konstruktionen.

Wir wählen $t_i, s_i \in S^1$ so, daß $\hat{c}_2(t_i) \in {e_2}^{b(i)} \hat{c}_1(s_i)$, wobei die t_i ihrem Index gemäß auf S^1 geordnet liegen sollen und $b : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$ eine Bijektion ist. Die Schreibweise $[r, s]$ für das „Intervall“ von $r \in S^1$ nach $s \in S^1$ übernehmen wir aus Teil (1).

Wir definieren nun induktiv über i die geschlossenen Kurven k_i für $i = 1, \ldots, n$. Die Kurve k_1 setzen wir aus zwei Teilen zusammen: der erste Teil ist $c_2|_{[t_0,t_1]}$. Der zweite ist entweder $c_1|_{[s_0,s_1]}$ oder $c_1|_{[s_1,s_0]}$ — welches dieser beiden Stücke wir wählen, hängt von der Spin-Struktur ab: wir wählen es so, daß $\chi([k_1]) = -1$. Dies ist möglich, da $\chi([c_1]) = -1$.

Die Kurve k_i für $2 \leq i \leq n-1$ durchläuft drei Teile: zunächst denjenigen Teil von c_1, den wir bei der Definition von k_{i-1} nicht ausgewählt haben, dann $c_2|_{[t_{i-1},t_i]}$ und schließlich entweder $c_1|_{[s_0,s_i]}$ oder $c_1|_{[s_i,s_0]}$. Die Wahl des letzten Teils machen wir immer so, daß $\chi([k_i]) = -1$.

Die Kurve k_n durchläuft schließlich den bei der Definition von k_{n-1} nicht ausgewählten Teil von c_1 und anschließend $c_2|_{[t_{n-1},t_0]}$. Wir wollen zeigen, daß auch $\chi([k_n]) = -1$.

Es gilt

$$\prod_{i=1}^{n} [k_i] = [c_2] \cdot [c_1]^{n+2m-1}$$

für ein $m \in \mathbb{Z}$. Also ist $\prod_1^n \chi([k_i]) = (-1)^n$. Da wir bereits für $i = 1, \ldots, n-1$ wissen, daß $\chi([k_i]) = -1$, folgt auch $\chi([k_n]) = -1$. Weiter ist

$$\sum \text{Länge}_g(k_i) = (n-1)\,\text{spin-sys}_1(\mathbb{T}^2, g) + \text{spin-}\ell_2(g) \leq n\,\text{spin-}\ell_2(g),$$

es gibt also mindestens ein k_i mit $\text{Länge}_g(k_i) \leq \text{spin-}\ell_2(g)$. Weiter ist klar, daß $[k_i] \notin \langle [c_1] \rangle$. Da k_i wiederum Ecken hat und deswegen verkürzt werden kann, erhalten wir analog zu oben einen Widerspruch zur Definition von $\text{spin-}\ell_2(g)$. Somit haben wir auch bei (2) die Annahme $n \geq 2$ zum Widerspruch geführt. $\square$

Nun sind wir soweit, daß wir einige Größen definieren können, die im Rest der Arbeit eine zentrale Rolle spielen. Wir definieren für eine Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{T}^2$ und eine nicht-triviale Spin-Struktur χ

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(g) &:= \frac{\text{area}(\mathbb{T}^2, g)}{\text{sys}_1(\mathbb{T}^2, g)^2} = \frac{\text{area}(\mathbb{T}^2, g)}{\ell_1(g)^2} \\
\mathcal{W}(g) &:= \frac{\text{area}(\mathbb{T}^2, g)}{\ell_2(g)^2} \\
\text{spin-}\mathcal{V}(g, \chi) &:= \frac{\text{area}(\mathbb{T}^2, g)}{\text{spin-sys}_1(g, \chi)^2} \\
\text{spin-}\mathcal{W}(g, \chi) &:= \frac{\text{area}(\mathbb{T}^2, g)}{\text{spin-}\ell_2(g, \chi)^2}
\end{aligned}$$

In den folgenden Abschnitten werden wir unter anderem auch Abschätzungen dafür herleiten, wie sich diese Größen unter konformer Änderung der Metrik verhalten.

Eine grobe Abschätzung, die für die wichtigsten Resultate ausreicht, liefert Proposition 3.7.6. Im nachfolgenden Theorem 3.7.7 soll dieses Resultat noch etwas verfeinert werden. Für diese verfeinerten Abschätzungen benötigen wir aber noch ein technisches Lemma, das wir jetzt bereitstellen wollen.

PROPOSITION 3.2.6. *Die kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M trage zwei konforme Riemannsche Metriken g_2 und $g_1 = e^{2u}g_2$. Sei A eine offene Menge in M mit glattem Rand. Das Bild der Abbildung $\pi_1(\bar{A}) \to \pi_1(M)$ sei gleich $\{1\}$. Die Funktion u erfülle $u \geq 0$ auf $M - A$ und $u = 0$ auf dem Rand ∂A. Es ist $\text{Länge}_{g_1}(\partial A) = \text{Länge}_{g_2}(\partial A)$.*

(1) *Ist Γ ein Normalteiler von $\pi_1(M)$, dann gilt*

$$\Gamma\text{-sys}_1(M, g_2) \leq \Gamma\text{-sys}_1(M, g_1) + \frac{1}{2}\text{Länge}_{g_1}(\partial A).$$

(2) *Sind Γ_1, Γ_2 Normalteiler von $\pi_1(M)$, dann gilt*

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2\text{-sys}_1(M, g_2) \leq \Gamma_1 \cup \Gamma_2\text{-sys}_1(M, g_1) + \text{Länge}_{g_1}(\partial A).$$

(3) *Wissen wir zusätzlich*

$$\Gamma_1\text{-sys}_1(M, g_1) + \Gamma_2\text{-sys}_1(M, g_1) > \Gamma_1 \cup \Gamma_2\text{-sys}_1(M, g_1) + \text{Länge}_{g_1}(\partial A), \quad (3.2.1)$$

dann gilt auch die stärkere Abschätzung

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2\text{-sys}_1(M, g_2) \leq \Gamma_1 \cup \Gamma_2\text{-sys}_1(M, g_1) + \frac{1}{2}\text{Länge}_{g_1}(\partial A).$$

Bemerkungen

(1) Schreiben wir ∂A als disjunkte Summe seiner Zusammenhangskomponenten $\partial A = \dot{\bigcup}_{i \in I} B_i$, dann gilt

$$\text{Länge}_{g_1}(\partial A) = 2 \sum_{i \in I} \text{diam}(B_i, g_1),$$

wobei $\text{diam}(B_i, g_1)$ der (intrinsische) Durchmesser von B_i bezüglich g_1 ist. Ersetzen wir in der obigen Proposition $\text{Länge}_{g_1}(\partial A)$ durch $2 \sum \text{diam}(B_i, g_1)$, dann gilt die Aussage und der Beweis auch für den Fall, daß die Dimension von M größer als 2 ist. Auch die Kompaktheit von M kann durch Kompaktheit von $\bar{A}$ ersetzt werden.

(2) Für $M = S^2 \times S^1$ sehen wir auch deutlich, wieso wir in den Voraussetzungen der Proposition nicht $\pi_1(\bar{A})$ durch $\pi_1(A)$ ersetzen können — zumindest für $\dim M \geq 3$. Sei g_1 die Produktmetrik einer kleinen runden S^2 und einer großen $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Wir wählen $A := M - S^2 \times \{0 \bmod \mathbb{Z}\}$. Wird die Funktion u genügend klein auf $S^2 \times ([.2, .8] \bmod \mathbb{Z})$, dann sind die Folgerungen der Proposition falsch.
Auch auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ gibt es eine ähnliche Metrik mit etwas schwächeren Eigenschaften.

Beweis von Proposition 3.2.6. In den Fällen (2) und (3) setzen wir $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Angenommen c sei eine geschlossene kürzeste Kurve in (M, g_1), deren freie Homotopieklasse nicht in Γ enthalten ist. Wir konstruieren nun eine Kurve $\hat{c} : S^1 \to M - A$ mit $[\hat{c}]_{\text{frei}} \not\subset \Gamma$ und

$$\text{Länge}_{g_1}(\hat{c}) \leq \text{Länge}_{g_1}(c) + \frac{k}{2}\text{Länge}_{g_1}(\partial A),$$

wobei $k = 1$ in den Fällen (1) und (3), und $k = 2$ im Fall (2). Mit der offensichtlichen Ungleichung

$$\text{Länge}_{g_2}(\hat{c}) \leq \text{Länge}_{g_1}(\hat{c})$$

folgt dann die Aussage.

Zunächst wollen wir annehmen, daß A zusammenhängend ist, die allgemeine Situation behandeln wir danach. Wenn c die Menge A nicht trifft, sind wir fertig. Andernfalls zerlegen wir das Intervall

$$D := c^{-1}(M - \bar{A}) = \dot{\bigcup_{j \in J}}]a_j, b_j[$$

in seine Zusammenhangskomponenten. In der relativen Homotopie-Gruppe $\pi_1(M, \bar{A})$ gilt

$$[c] = \prod_{j \in J} [c|_{[a_j, b_j]}],$$

wobei das Produkt nur endlich viele Faktoren ungleich 1 enthält. Wir identifizieren Γ mit seinem Bild in $\pi_1(M, \bar{A})$.

Behauptung (1): Wähle ein $j \in J$, für das $[c|_{[a_j, b_j]}] \notin \Gamma$. Wir wählen nun $\hat{c}$ derart, daß

$$\hat{c}|_{[a_j, b_j]} = c|_{[a_j, b_j]}$$

und $\hat{c}|_{S^1 - [a_j, b_j]}$ sei Kürzeste von $c(b_j)$ nach $c(a_j)$ auf ∂A. Es folgt

$$\text{Länge}_{g_1}(\hat{c}|_{S^1 - [a_j, b_j]}) \leq \frac{1}{2}\text{Länge}_{g_1}(\partial A).$$

Also erfüllt $\hat{c}$ das Gewünschte.

Behauptung (2) *und* (3): Wenn es wie im Beweis von Behauptung (1) ein j gibt, für das $[c|_{[a_j,b_j]}] \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ gilt, so sind wir fertig.

Andernfalls gibt es verschiedene $j_1, j_2 \in J$ mit

$$[c|_{[a_{j_1},b_{j_1}]}] \in \Gamma_2 - \Gamma_1$$

und

$$[c|_{[a_{j_2},b_{j_2}]}] \in \Gamma_1 - \Gamma_2.$$

Aus jedem dieser beiden Kurvenstücke konstruieren wir analog zur Konstruktion von $\hat{c}$ in (1) eine geschlossene Kurven $\hat{c}_1$ bzw. $\hat{c}_2$. Es gilt dann

$$\Gamma_1\text{-sys}_1(M, g_1) + \Gamma_2\text{-sys}_1(M, g_1) \leq \Gamma_1 \cup \Gamma_2\text{-sys}_1(M, g_1) + \text{Länge}_{g_1}(\partial A).$$

Diese Ungleichung widerspricht natürlich der Voraussetzung (3.2.1), d. h. dieser Fall tritt unter (3) nie auf.

Wir müssen in diesem Fall also nur noch die schwächere Aussage von (2) zeigen. Hierzu betrachten wir eine Kurve $\hat{c}$, die auf $B := [a_{j_1}, b_{j_1}] \cup [a_{j_2}, b_{j_2}]$ mit c übereinstimmt und auf $S^1 - B$ aus zwei kürzesten Verbindungen in ∂A besteht. Es gilt dann

$$\text{Länge}_{g_1}(\hat{c}|_{S^1-B}) \leq \text{Länge}_{g_1}(\partial A).$$

Hieraus erhalten wir Behauptung (2). Somit folgt die Aussage der Proposition für zusammenhängendes A.

Besteht nun A aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten, so konstruieren wir $\hat{c}$ induktiv über die Anzahl i der Zusammenhangskomponenten. Bei jedem Schritt nehmen wir die Konstruktion von $\hat{c}$ für zusammenhängende A.

Wenn A sogar aus (abzählbar) unendlich vielen Zusammenhangskomponenten besteht, dann konvergiert $\hat{c}$ für $i \to \infty$ gegen eine geeignete Kurve. □

3.3 Modulräume

Sei g eine Riemannsche Metrik auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2$. Wir schreiben wie in den vorigen Abschnitten $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit einer flachen Metrik $\tilde{g}$.

Dann definieren wir

$$\widetilde{\mathcal{V}}(g) := \mathcal{V}(\tilde{g})$$
$$\widetilde{\mathcal{W}}(g) := \mathcal{W}(\tilde{g}).$$

Da — wie gesagt — $\tilde{g}$ bis auf eine Konstante sich eindeutig aus g ergibt und $\mathcal{V}(g)$ und $\mathcal{W}(g)$ skalierungsinvariant sind, sind diese beiden Größen wohldefinierte konforme Invarianten, d. h. sie sind invariant unter konform äquivalenter Änderung von g. Wir werden nun zeigen, daß diese Invarianten die konforme Struktur vollständig charakterisieren.

LEMMA 3.3.1. *Sei $[g]$ die konforme Äquivalenzklasse von g. Dann definiert*

$$m : [g] \to \left(\sqrt{\frac{\widetilde{\mathcal{V}}(g)}{\widetilde{\mathcal{W}}(g)} - \widetilde{\mathcal{V}}(g)^2}, \widetilde{\mathcal{V}}(g) \right)$$

eine Bijektion von der Menge der konformen Strukturen von $\mathbb{T}^2$ auf die Menge

$$\mathcal{M} := \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1/2,\ y > 0,\ x^2 + y^2 \ge 1\}.$$

Der Torus $(\mathbb{T}^2, g)$ ist konform äquivalent zu $\mathbb{R}^2/\langle(1,0), m([g])\rangle$ mit der Standardmetrik.

Wir nennen $\mathcal{M}$ den *Modulraum konformer Strukturen* auf $\mathbb{T}^2$. Weiter nennen wir $m([g])$ die *Koordinaten der konformen Struktur im Modulraum $\mathcal{M}$*.

Beweis. Da die Größen $\widetilde{\mathcal{V}}(g)$ und $\widetilde{\mathcal{W}}(g)$ konforme Invarianten sind, ist die Abbildung m wohldefiniert.

In jeder konformen Äquivalenzklasse ist eine flache Metrik enthalten. Zu jedem flachen Torus $(\mathbb{T}^2, g)$ gibt es aber eindeutig bestimmte $(x,y) \in \mathcal{M}$, so daß $(\mathbb{T}^2, g)$ homothetisch zu $T(x,y) = \mathbb{R}^2/\langle(1,0),(x,y)\rangle$ mit der Standardmetrik ist. Weiter gilt hierfür $\widetilde{\mathcal{V}}(g) = y$ und $\widetilde{\mathcal{W}}(g) = y/(x^2+y^2)$, also $m(g) = (x,y)$. Hieraus folgen die Aussagen des Lemmas. □

Wir wollen nun analog die Menge der spin-konformen Äquivalenzklassen untersuchen. Die wohl banalste aber zugleich grundlegende spin-konforme Invariante ist die Trivialität bzw. Nicht-Trivialität der Spin-Struktur: sind $[g_1, \chi_1]$ und $[g_2, \chi_2]$ spin-konform äquivalent, dann ist χ_1 genau dann trivial ($\chi_1 \equiv 1$), wenn χ_2 trivial ist.

Die spin-konformen Äquivalenzklassen mit trivialem Spin-Homomorphismus stehen vermöge

$$[g, 1] \mapsto [g]$$

in Bijektion mit den konformen Äquivalenzklassen. Analog zu oben beschreiben wir diese spin-konformen Strukturen durch $\mathcal{M}$. Wir nennen $\mathcal{M}$ in diesem Zusammenhang auch die *kleine Zusammenhangskomponente des spin-konformen Modulraums*.

In dieser Arbeit sind wir aber in erster Linie an den nicht-trivialen Spin-Strukturen interessiert. Hierfür müssen neue Invarianten definiert werden: Ist $\chi : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to$

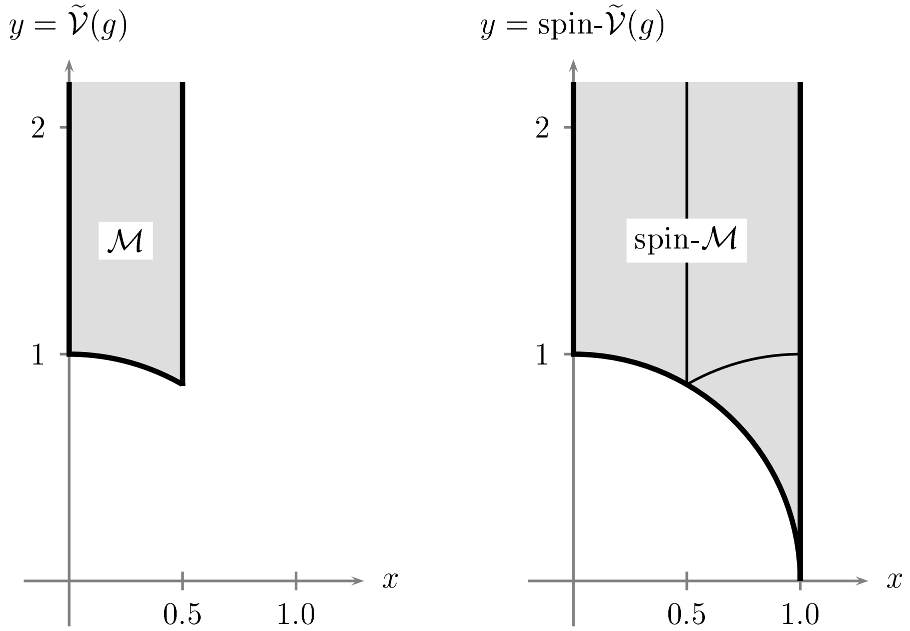


Abbildung 3.1: Die Modulräume $\mathcal{M}$ und spin-$\mathcal{M}$

$\mathbb{Z}_2$ ein nicht-trivialer Spin-Homomorphismus, dann definieren wir die beiden spin-konformen Invarianten

$$\begin{aligned}\text{spin-}\widetilde{\mathcal{V}}(g,\chi) &:= \text{spin-}\mathcal{V}(\tilde{g},\chi)\\ \text{spin-}\widetilde{\mathcal{W}}(g,\chi) &:= \text{spin-}\mathcal{W}(\tilde{g},\chi).\end{aligned}$$

Es gilt nun ein analoges Lemma

LEMMA 3.3.2. *Sei χ ein nicht-trivialer Spin-Homomorphismus und g eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{T}^2$. Wir bezeichnen mit $[g,\chi]$ die spin-konforme Äquivalenzklasse von g,χ. Dann definiert*

$$\text{spin-}m : [g,\chi] \to \left(\sqrt{\frac{\text{spin-}\widetilde{\mathcal{V}}(g,\chi)}{\text{spin-}\widetilde{\mathcal{W}}(g,\chi)} - \text{spin-}\widetilde{\mathcal{V}}(g,\chi)^2}\ ,\ \text{spin-}\widetilde{\mathcal{V}}(g,\chi)\right)$$

eine Bijektion von der Menge der spin-konformen Strukturen von $\mathbb{T}^2$ mit nicht-trivialem Spin-Homomorphismus auf die Menge

$$\text{spin-}\mathcal{M} := \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ y > 0,\ x^2 + y^2 \ge 1\}.$$

Versehen wir den Torus

$$T(\text{spin-}m([g,\chi])) := \frac{\mathbb{R}^2}{\langle (1,0), \text{spin-}m([g,\chi]) \rangle}$$

mit der Standardmetrik und dem Spin-Homomorphismus $\tilde{\chi}$ *mit*

$$\tilde{\chi}((1,0)) = \tilde{\chi}(\text{spin-}m([g,\chi])) = -1,$$

dann ist $T(\text{spin-}m([g,\chi]))$ *spin-konform äquivalent zu* $(\mathbb{T}^2, g, \chi)$.

Wir nennen spin-$\mathcal{M}$ *die große Zusammenhangskomponente des Modulraums spin-konformer Strukturen* auf $\mathbb{T}^2$. Weiter nennen wir spin-$m([g,\chi])$ die *Koordinaten der spin-konformen Struktur im Modulraum* spin-$\mathcal{M}$. Der *Modulraum spin-konformer Strukturen* ist $\mathcal{M}\dot{\cup}\,\text{spin-}\mathcal{M}$.

Die Zuordnungsvorschrift $[g,\chi] \mapsto [g]$ definiert eine Abbildung

$$U : \mathcal{M}\dot{\cup}\,\text{spin-}\mathcal{M} \to \mathcal{M}.$$

Diese Abbildung ist eine Quotientenabbildung im Sinne topologischer Räume. Trivialerweise gilt $U|_{\mathcal{M}} = \text{id}$. Die Restriktion $U|_{\text{spin-}\mathcal{M}}$ ist eine dreifache Überlagerung mit Verzweigungen über dem Rand von $\mathcal{M}$. Zur Veranschaulichung ist deswegen das Urbild des Randes von $\mathcal{M}$, das im Innern von spin-$\mathcal{M}$ liegt, in Abbildung 3.1 dünn schwarz eingezeichnet.

Beweis von Lemma 3.3.2. Die Größen spin-$\widetilde{\mathcal{V}}(g,\chi)$ und spin-$\widetilde{\mathcal{W}}(g,\chi)$ sind spin-konforme Invarianten, d. h. sie sind konstant auf den spin-konformen Äquivalenzklassen von (g,χ). Die Abbildung spin-m ist also wohldefiniert.

In jeder spin-konformen Äquivalenzklasse ist eine flache Metrik enthalten. Zu jedem flachen Torus $(\mathbb{T}^2, g)$ mit Spin-Homomorphismus χ gibt es aber eindeutig bestimmte $(x,y) \in \text{spin-}\mathcal{M}$, so daß $(\mathbb{T}^2, g)$ homothetisch zu $T(x,y)$ mit der Standardmetrik und dem im Lemma beschriebenen Spin-Homomorphismus ist. Weiter gilt hierfür spin-$\widetilde{\mathcal{V}}(g) = y$ und spin-$\widetilde{\mathcal{W}}(g) = y/(x^2+y^2)$, also spin-$m(g) = (x,y)$. Hieraus folgen die Aussagen des Lemmas. □

3.4 Pinocchio- und Kegel-Metriken

Bevor wir eine Abschätzung für die Oszillation der Streckungsfunktion herleiten, wollen wir noch zwei Beispielfamilien darstellen. Dies soll in diesem Abschnitt geschehen. Die Höhenlinien dieser Beispiele haben eine besonders einfache Gestalt, deswegen erleichtern sie das Verständnis der Beweise des folgenden Abschnitts.

Die Beispiele sind aber auch deswegen wichtig, weil sie aufzeigen, daß manche Voraussetzungen in den Resultaten notwendig sind (z. B. in den Theoremen 3.5.1 und 3.6.1, in Korollar 3.6.8 und in Theorem 3.7.7).

Ähnliche Beispiele finden sich bereits häufig in der Literatur. Auch der bereits zitierte Artikel [BrM91] konstruiert ähnliche Beispiele: dort sind es jedoch Lösungsfamilien von Gleichung (3.1.2), auf eine geometrische Interpretation wird verzichtet.

Um die Beispiele diskutieren zu können, benötigen wir zunächst ein Lemma.

LEMMA 3.4.1. *Die Kreisscheibe $B_R(0) \subset \mathbb{C}$ von Radius R trage eine rotationssymmetrische Metrik g, d. h. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ operiert vermöge der Multiplikation isometrisch auf $(B_R(0), g)$. Außerdem gebe es ein $S \in]0, R[$, so daß g auf dem Ring $\mathcal{R}_{S,R} := B_R(0) - B_S(0)$ mit der Standardmetrik g_{eukl} von $\mathbb{C}$ übereinstimmt. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\Psi : B_R(0) \to B_R(0)$, der $\mathcal{R}_{S,R}$ punktweise fix läßt, und eine rotationssymmetrische Funktion $u : B_R(0) \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} u \subset B_S(0)$, so daß $\Psi^*(g) = e^{2u} g_{\mathrm{eukl}}$. Dieses u ist eindeutig.*

Beweis. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz ([Fo81, 3.27.9]) ist $(B_R(0), g)$ konform zu $(B_1(0), g_{\mathrm{eukl}})$ oder $(\mathbb{C}, g_{\mathrm{eukl}})$. Aus diesem Grunde gibt es eine Funktion $u_1 : B_R(0) \to \mathbb{R}$, so daß $e^{-2u_1} g$ flach ist. Also erfüllt u_1 die Gleichung $K_g = \Delta_g u_1$. Da auf $\mathcal{R}_{S,R}$ die Krümmung K_g verschwindet, ist u_1 eine harmonische Funktion auf $\mathcal{R}_{S,R}$. Nun setzen wir

$$u_2(x) := \int_0^1 u_1\left(e^{2\pi i t} x\right)\, dt.$$

Die Funktion u_2 erfüllt ebenfalls $K_g = \Delta_g u_2$ und ist zusätzlich invariant unter der Aktion von S^1. Folglich ist u_2 eine rotationssymmetrische und harmonische Funktion auf $\mathcal{R}_{S,R}$. Als solche erfüllt u_2 auf $\mathcal{R}_{S,R}$ die Differentialgleichung

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_2 + \frac{\partial}{\partial r} u_2 = 0$$

und hat deswegen die Form $a + b \log r$. Es gilt

$$\begin{aligned} 2\pi b = b \int_{\partial B_R(0)} * d \log r = \int_{\partial B_R(0)} * du_2 = \int_{B_R(0)} d * du_2 \\ = -\int_{B_R(0)} \mathrm{dvol}_g\, \Delta_g u_2 = -\int_{B_R(0)} \mathrm{dvol}_g\, K_g, \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

und das letzte Integral ist nach dem Satz von Gauß-Bonnet gleich Null.

Setzen wir also $u_3 := u_2 - a$, dann ist der Träger von u in $B_S(0)$. Außerdem ist $(B_R(0), e^{-2u_3} g)$ flach und rotationssymmetrisch, also eine flache Kreisscheibe mit Umfang $2\pi R$. Es gibt deshalb eine Isometrie $\Psi : (B_R(0), g_{\mathrm{eukl}}) \to (B_R(0), e^{-2u_3} g)$, die $\mathcal{R}_{S,R}$ fix läßt. Wir setzen $u := u_3 \circ \Psi$ und erhalten die Aussage des Lemmas für u.

Angenommen u wäre nicht eindeutig und sei $\hat{u}$ eine weitere Lösung. Dann liegt $\hat{u} - u$ im Kern von $\Delta_{\tilde{g}}$ und verschwindet auf dem Ring $\mathcal{R}_{S,R}$. Hieraus folgt $\hat{u} = u$, also die Eindeutigkeit. □

Um die folgende Konstruktion besser zu verstehen, betrachte man Abbildung 3.2. Für $\beta \in [0, \pi/2[$ setzen wir $\delta := (\pi/4) - (\beta/2)$. Sei nun B_β ein glattes reguläres Kurvenstück in $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{e_x, e_z\} \subset \mathbb{R}^3$ von $(-2, 0)$ nach $(-1, \delta)$, das nirgends nach rechts gekrümmt ist, in einer Umgebung von $(-2, 0)$ mit der x-Achse übereinstimmt und in einer Umgebung von $(-1, \delta)$ mit einer Geraden übereinstimmt, die mit der x-Achse den Winkel $(\pi/2) - \beta$ einschließt (siehe Abbildung 3.2). Wir fordern außerdem, daß der Einheitstangentialvektor nur den Winkelbereich von 0 bis $(\pi/2) - \beta$ überstreicht — anschaulich gesagt: wir verbieten Loopings. Nun rotieren wir B_β um die z-Achse und erhalten eine Rotationsfläche, die wir die *Sockelfläche* $S_{1,\beta}$ *mit Radius* 1 *und Winkel* β nennen wollen. Zentrische Streckung von $S_{1,\beta}$ am Ursprung mit Faktor R ergibt die *Sockelfläche* $S_{R,\beta}$ *mit Radius* R. Nun punktspiegeln wir B_β am Punkt $(-1, 0)$, rotieren abermals um die z-Achse und erhalten nach zentrischer Streckung um den Faktor ρ die *Kappe* $\Omega_{\rho,\beta}$ *mit Radius* ρ.

Im folgenden sei nun $R \in]0, 1/4[$ gegeben. Wir nehmen nun ein $H > 0$, so daß $\rho := R - H \tan\beta > 0$.

Für $\beta > 0$ definieren wir nun eine neue Fläche. Aus dem Torus

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times \{0\} \subset \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R},$$

der mit der Standardmetrik versehen ist, schneiden wir einen Ball vom Radius $2R$ um den Ursprung aus und kleben hier die Sockelfläche $S_{R,\beta}$ ein. Auf die zweite, noch unverklebte Randkomponente von $S_{R,\beta}$ setzen wir den Mantel eines Kegelstumpfs mit Basisradius R und Höhe H, der zu einem Kegel mit halbem Öffnungswinkel β gehört. An den oberen Rand dieses Kegelstumpfmantels kleben wir die um $(R+\rho)\delta + H$ nach oben verschobene Kappe $\Omega_{\rho,\beta}$. Die Fläche M, die wir so erhalten haben, ist wieder diffeomorph zu einem 2-Torus.

M trage nun die von $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$ induzierte Metrik. Diese Metrik nennen wir die *Kegelmetrik* $g_{R,H,\beta}$. Nach dem vorangehenden Lemma kann der Diffeomorphismus $F : \mathbb{T}^2 \to M$ so gewählt werden, daß $F^* g_{R,H,\beta} = e^{2u}\, g_{\mathrm{eukl}}$, wobei der Träger von u in einem Ball von Radius $2R$ um den Ursprung liegt. Außerdem ist u, eingeschränkt auf diesen Ball, rotationssymmetrisch. Wir identifizieren M mit $\mathbb{T}^2$ mittels F.

Im Fall $\beta = 0$ gehen wir analog vor. Anstelle eines Kegelstumpfs der Höhe H nehmen wir einen Zylinder der Höhe H und setzen $\rho := R$. Wir erhalten die Metrik $g_{R,H,0}$.

In den folgenden Beispielen werden wir H gegen unendlich gehen lassen. Die auf den flachen Torus aufgeklebte, im wesentlichen zylinderförmige Nase wird somit

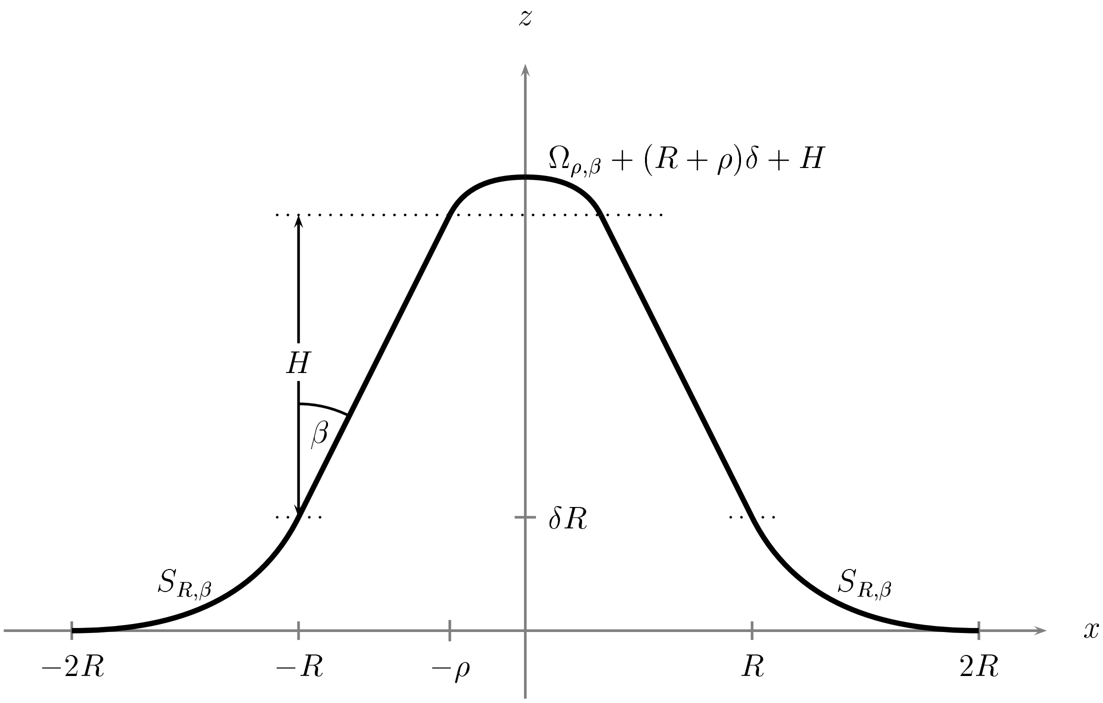


Abbildung 3.2: Die Kegel-Metrik

länger und länger. Dies erinnert an die Geschichte „Pinocchios Abenteuer“ von Carlo Collodi. Deswegen nennen wir diese Metriken *Pinocchio-Metriken*.

Man beachte, daß alle hier konstruierten Pinocchio- und Kegel-Metriken konform äquivalent zum quadratischen flachen Torus sind, mit der Notation der vorangehenden Abschnitte gilt also $\tilde{g} = \text{konst} \cdot g_{\text{eukl}}$.

Wir haben deshalb

$$\text{spin-}\mathcal{V}(g_{R,H,\beta}) = \mathcal{V}(\tilde{g}) = \frac{\text{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})}{\text{sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g})^2} = 1.$$

Man sieht sofort

$$\int_{\mathbb{T}^2, g_{R,H,\beta}} \left| K_{g_{R,H,\beta}} \right| = 4\pi(1 - \sin\beta).$$

Um den Sprachgebrauch zu vereinfachen, nennen wir sowohl den eingesetzten Kegelstumpfmantel der Kegelmetrik, als auch den eingesetzten Zylinder der Pinocchio-Metrik kurz Kegelstück. Auf dem Kegelstück ist u wieder eine harmonische und

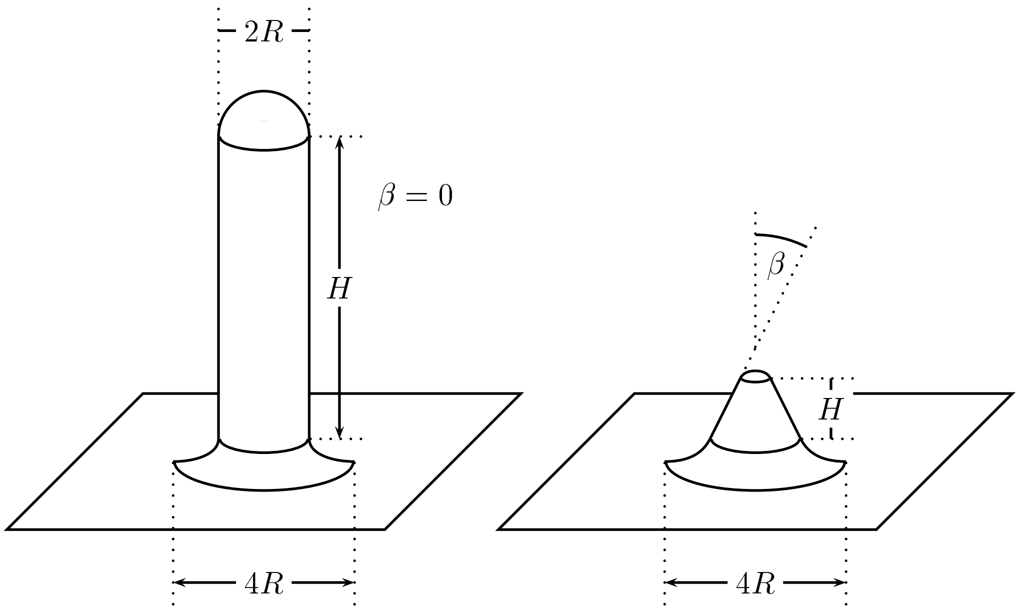


Abbildung 3.3: Pinocchio- und Kegel-Metriken

rotationssymmetrische Funktion. Nach Einführung von Polarkoordinaten (r, φ) auf $(\mathbb{T}^2, g_{\text{eukl}})$ hat u also wiederum die Form

$$u(r, \varphi) = a + b \log r.$$

Wenn (r, φ) auf dem Kegelstück liegt, dann gilt nun aber diesmal

$$\int_{B_r(0)} K_{g_{R,H,\beta}} = 2\pi(1 - \sin\beta),$$

also mit Gleichung (3.4.1)

$$u(r, \varphi) = a + (\sin\beta - 1) \log r.$$

Das Kegelstück soll nun vom Koordinatenradius r_1 bis r_2 gehen. Die Länge des unteren Randes des Kegelstücks können wir auf zwei Arten ausdrücken:

$$2\pi R = 2\pi r_2 e^{u(r_2)}, \tag{3.4.2}$$

also $\log R = a + \sin\beta \log r_2$. Analog ergibt der obere Rand $\log\rho = a + \sin\beta \log r_1$.

Für die Kegel-Metrik $(\beta > 0)$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} \operatorname{osc} u \geq u(r_1) - u(r_2) &= (1 - \sin\beta)\Big(\log(r_2) - \log(r_1)\Big) \\ &= \left(\frac{1}{\sin\beta} - 1\right) \log\left(\frac{R}{\rho}\right), \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck geht für $\rho/R \to 0$ gegen unendlich.

Für die Pinocchio-Metrik ($\beta = 0$) haben wir hingegen

$$H = \int_{r_1}^{r_2} e^{u(r)}\, dr = \Big(u\,(r_1) - u\,(r_2)\Big)e^a,$$

und nach (3.4.2) gilt $R = e^a$, also

$$H/R = u(r_1) - u(r_2) \leq \operatorname{osc} u.$$

Also geht $\operatorname{osc} u$ für $H/R \to \infty$ gegen unendlich.

Wir erhalten also hinreichende Kriterien, wann $\operatorname{osc} u$ gegen unendlich geht. Wenn wir nun also in den folgenden Kapiteln eine obere Schranke für $\operatorname{osc} u$ finden wollen, muß diese Schranke Terme enthalten, die für $H/R \to \infty$ bzw. $\rho/R \to 0$ groß werden.

3.5 Abschätzung der Streckungsfunktion

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (evtl. mit Rand). Wir bezeichnen mit $K^+ := \max\{K, 0\}$ und $K^- := \min\{K, 0\}$ den positiven und negativen Teil der Gaußschen Krümmung. Außerdem sei für $p \in [1, \infty]$

$$\mathcal{K}_p(M, g) := \|K_g\|_{L^p(M,g)} \operatorname{vol}(M, g)^{\frac{2}{n} - \frac{1}{p}}$$
$$\mathcal{K}_p^{\pm}(M, g) := \|K_g^{\pm}\|_{L^p(M,g)} \operatorname{vol}(M, g)^{\frac{2}{n} - \frac{1}{p}}$$

die p-Norm der Gaußschen Krümmung von (M, g) (bzw. des positiven oder negativen Teils), multipliziert mit einer Volumenpotenz. Die Größe $\mathcal{K}_p(M, g)$ ist skalierungsinvariant. Für kompaktes M ist $\mathcal{K}_p(M, g)$ endlich und stetig in p. Wegen der Hölderschen Ungleichung ist $\mathcal{K}_p(M, g)$ monoton wachsend in p. Analoges gilt für $\mathcal{K}_p^{\pm}(M, g)$.

THEOREM 3.5.1. *Der 2-Torus $\mathbb{T}^2$ trage eine Riemannsche Metrik $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit $\tilde{g}$ flach. Für ein $p \in \,]1, \infty]$ gelte*

$$\mathcal{K}_p := \mathcal{K}_p(\mathbb{T}^2, g) < 4\pi.$$

Dann haben wir die Abschätzungen

(1) $$\operatorname{osc} u \leq \mathcal{S}\Big(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(\tilde{g})\Big),$$

(2) $$\operatorname{osc} u \leq \mathcal{S}\Big(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\Big),$$

wobei

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}, p, \mathcal{V}) := \frac{1}{2}\left|\log\left(1 - \frac{\mathcal{K}}{4\pi}\right)\right| + \frac{\mathcal{K}}{8\pi - 2\mathcal{K}}\, q \log(2q) + \frac{q\mathcal{K}}{4\pi} + \frac{\mathcal{K}\mathcal{V}}{8}$$

mit $q := p/(p-1)$.

Da $\mathcal{K}_p$ stetig in p ist, erhalten wir also genau dann eine Schranke, wenn $\mathcal{K}_1 < 4\pi$ ist. Die Schranke $\mathcal{S}$ wird grundlegend für die Kapitel 4 und 5 sein.

Bemerkung. Die Abschätzung (1) ist stärker als Abschätzung (2). Dies wird in Proposition 3.7.2 klar werden. Kennen wir also den konformen Typ, z. B. aufgrund der Symmetriegruppe von $(\mathbb{T}^2, g)$, dann erhalten wir aus (1) eine bessere Abschätzung als aus (2). Der Vorteil der Abschätzung (2) ist, daß wir selbst dann eine Abschätzung erhalten, wenn wir die konforme Invariante $\mathcal{V}(\tilde{g})$ nicht kennen.

Beispiel. Es kann keine Schranke $\operatorname{osc} u \leq \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_1, \mathcal{V}(\tilde{g}))$ geben. Dies zeigen die Kegelmetriken $g_{R,H,\beta}$ mit festem R und β und $H \to R \cot \beta$. Denn dann gilt $\rho \to 0$ und somit $\operatorname{osc} u \to \infty$, wohingegen $\mathcal{V}(\tilde{g}) \equiv 1$ und $\mathcal{K}_1 \equiv 4\pi(1 - \sin \beta)$ konstant bleiben.

Bemerkung. Ob die Schranke $\operatorname{osc} u \leq \mathcal{S}(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(\tilde{g}))$ so verbessert werden kann, daß sie auch für $\mathcal{K}_p \geq 4\pi$ gilt, soll in dieser Arbeit offenbleiben. Die Pinocchio-Metriken $g_{R,H,0}$ mit $H \to \infty$ und $R =$ konst liefern jedenfalls **kein** Gegenbeispiel: für sie gilt zwar $\operatorname{osc} u \geq H \to \infty$, aber auch $\mathcal{K}_p \to \infty$ für $p > 1$: Wenn wir auf konstantes Volumen reskalieren konzentriert sich für $p \to \infty$ die Krümmung der „Nasenspitze“ auf einer kleiner werdenden Fläche.

Der Beweis von Theorem 3.5.1 beruht im wesentlichen auf drei Abschätzungen (Korollar 3.5.6, Satz 3.5.7 und Satz 3.5.9). In den Beweisen für diese Abschätzungen wiederum benötigen wir zwei Analysis-Lemmata, mit denen wir beginnen wollen.

LEMMA 3.5.2. *Gegeben seien die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit f monoton wachsend, g stetig differenzierbar und $f(a) = g(a)$. Es existiere ferner eine abgeschlossene Nullmenge $\mathcal{N}$, so daß f auf $[a, b] - \mathcal{N}$ differenzierbar ist und $f' \geq g'$ erfüllt. Dann gilt auch $f(b) \geq g(b)$.*

Beweis. Die kompakte Nullmenge $\mathcal{N}$ kann mit endlich vielen disjunkten offenen Intervallen $I_1, \ldots, I_n$ überdeckt werden, wobei $\operatorname{vol}(\bigcup I_j) \leq \varepsilon$ für beliebig kleines ε. Wegen der Monotonie von f gilt somit

$$f(b) \geq f(a) + \int_{[a,b]-\bigcup I_j} f' \geq g(a) + \int_{[a,b]-\bigcup I_j} g' \geq g(b) - \varepsilon \max g',$$

und im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt die Aussage. □

LEMMA 3.5.3. *Seien f_1 und f_2 zwei L^1-Funktionen auf $[a, b]$ und $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ stetige Funktionen. Sei $C \in \mathbb{R}^+$. Für alle $t \in [a, b]$ gelte*

$$f_1(t) \geq g_1(t) \left(C + \int_a^t g_2(s) f_1(s)\, ds \right)$$
$$f_2(t) = g_1(t) \left(C + \int_a^t g_2(s) f_2(s)\, ds \right).$$

Dann ist $f_1(t) \geq f_2(t)$ im Definitionsbereich.

Beweis. Angenommen es existiere ein $t \in [a,b]$ mit $f_1(t) < f_2(t)$. Dann ist $t_0 := \inf\{t \in [a,b] \mid f_1(t) < f_2(t)\} \in [a,b[$ und $f_1(t_0) = f_2(t_0)$. Wir setzen

$$S := \max_{t\in[a,b]} g_1(t) \cdot \max_{t\in[a,b]} g_2(t)$$

und $t_1 := \min\{t_0 + 1/(2S), b\}$.

Für $t \in [t_0, t_1]$ gilt

$$\begin{aligned} f_2(t) - f_1(t) &\le g_1(t) \int_{t_0}^{t} g_2(s)\,(f_2(s) - f_1(s))\;ds \\ &\le S\,|t_1 - t_0| \max_{s\in[t_0,t_1]} f_2(s) - f_1(s) \le \frac{1}{2} \max_{s\in[t_0,t_1]} f_2(s) - f_1(s) \end{aligned}$$

Und somit gilt $f_1(t) \ge f_2(t)$ auf $[t_0, t_1]$ im Widerspruch zur Konstruktion von t_0. □

SATZ 3.5.4. *Sei G eine beschränkte, offene Menge in $\mathbb{R}^2$ mit der Standardmetrik $\tilde{g} = g_{\text{eukl}}$. Ferner sei $u : \overline{G} \to \mathbb{R}_0^+$ eine glatte Funktion mit $u|_{\partial G} \equiv 0$ und $g = e^{2u}\tilde{g}$ eine weitere Riemannsche Metrik. Wir definieren $\mu_0 := \operatorname{area}(G,g)$, und für die Gaußsche Krümmung K_g bezüglich g sei*

$$k(A) := \sup\left\{ \int_{\widehat{G},g} K_g \;\middle|\; \widehat{G} \text{ offene Menge in } G,\ \operatorname{area}(\widehat{G},g) = A \right\}.$$

Es gebe weiter $\kappa \in\,]0, 2\pi[$, $C > 0$, $r \in\,]0,1]$ und $\mu_1 \in\,]0, \mu_0]$, so daß

$$k(A) \le \begin{cases} C \cdot A^r \le \kappa & \text{für } \ 0 \le A \le \mu_1 \\ \kappa & \text{für } \ \mu_1 \le A \le \mu_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\max u \le \frac{1}{2}\left|\log\left(1 - \frac{\kappa}{2\pi}\right)\right| + \frac{\kappa}{4\pi - 2\kappa} \log\left(\frac{\mu_0}{\sqrt[r]{r}\,\mu_1}\right).$$

KOROLLAR 3.5.5. *Sei G eine beschränkte, offene Menge in $\mathbb{R}^2$ mit der Standardmetrik $\tilde{g}$. Ferner sei $u : \overline{G} \to \mathbb{R}_0^+$ eine glatte Funktion mit $u|_{\partial G} \equiv 0$ und $g = e^{2u}\tilde{g}$ eine weitere Riemannsche Metrik. Für ein $p \in\,]1, \infty]$ sei $\mathcal{K}_p^+ = \mathcal{K}_p^+(G,g) < 2\pi$. Dann haben wir die Abschätzung*

$$\max u \le \frac{1}{2}\left|\log\left(1 - \frac{\mathcal{K}_p^+}{2\pi}\right)\right| + \frac{\mathcal{K}_p^+}{4\pi - 2\mathcal{K}_p^+}\, q \log q,$$

wobei $q := p/(p-1)$.

KOROLLAR 3.5.6. *Sei G eine offene Menge in $\mathbb{T}^2$, so daß alle Schleifen $\gamma : S^1 \to G$ in $\mathbb{T}^2$ zusammenziehbar sind. Ferner sei $\tilde{g}$ ein flache Metrik auf $\mathbb{T}^2$ und $g = e^{2u}\tilde{g}$ eine weitere Riemannsche Metrik, wobei $u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $u|_{\partial G} \equiv 0$ und $u|_G \geq 0$ ist. Für ein $p \in\,]1, \infty]$ sei*

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_p(\mathbb{T}^2, g) < 4\pi.$$

Dann haben wir die Abschätzung

$$\max_{x \in \overline{G}} u(x) \leq \frac{1}{2}\left|\log\left(1 - \frac{\mathcal{K}_p}{4\pi}\right)\right| + \frac{\mathcal{K}_p}{8\pi - 2\mathcal{K}_p}\, q \log(2q),$$

wobei $q := p/(p-1)$.

Beweis von Satz 3.5.4. Sei v ein zunächst ein regulärer Wert von u. Wir definieren $G(v) := \{x \in G \,|\, u(x) > v\}$, dies ist also die Menge aller Punkte, deren Wert größer als v ist. Den Flächeninhalt von $G(v)$ bezüglich g bzw. $\tilde{g}$ bezeichnen wir mit $A(v)$ bzw. $\tilde{A}(v)$. Die Länge des Randes $\partial G(v)$ dementsprechend mit $l(v)$ bzw. $\tilde{l}(v)$. Als Funktionen in v betrachtet sind $A(v)$, $\tilde{A}(v)$, $l(v)$ und $\tilde{l}(v)$ differenzierbar in allen regulären Werten v von u. Es gilt hiermit

$$e^{2v}\tilde{A}(v) \leq A(v) \leq e^{2\max u}\tilde{A}(v) \tag{3.5.1}$$

$$e^{2v}\frac{d}{dv}\tilde{A}(v) = \frac{d}{dv}A(v) \tag{3.5.2}$$

$$e^{v}\tilde{l}(v) = l(v) \tag{3.5.3}$$

$$\int_{G(v),g} K_g \leq k(A(v)). \tag{3.5.4}$$

Andererseits ist nach Gleichung (3.1.1)

$$\int_{G(v),g} K_g = \int_{G(v),g} \Delta_g u = -\int_{\partial G(v)} * du = \int_{\partial G(v),\tilde{g}} |du|_{\tilde{g}}. \tag{3.5.5}$$

Die letzte Gleichung folgt, da u immer in Richtung des Inneren steigt und somit $*\,du$ auf $\partial G(v)$ immer negativ orientiert ist. Unter anderem sehen wir auch, daß $\int_{G(v),g} K_g$ positiv ist für alle regulären Werte v von u, die im Bild von u liegen.

Wir berechnen unter Verwendung von (3.5.4) und (3.5.5)

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dv}\tilde{A}(v) &= \int_{\partial G(v),\tilde{g}} \frac{1}{|du|_{\tilde{g}}} \geq \frac{\tilde{l}(v)^2}{\int_{\partial G(v),\tilde{g}} |du|_{\tilde{g}}} \\ &\geq \frac{\tilde{l}(v)^2}{k(A(v))} \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

für alle regulären Werte v von u, die im Bild von u liegen. Nun benutzen wir die isoperimetrische Ungleichung

$$\tilde{l}(v)^2 \geq 4\pi\, \tilde{A}(v) \tag{3.5.7}$$

und erhalten somit

$$-\frac{d}{dv}\tilde{A}(v) \geq \frac{4\pi}{k(A(v))}\tilde{A}(v). \tag{3.5.8}$$

Sei $u_2 \in [0, \max u[$ so gewählt, daß $A(u_2) = \mu_2 := \sqrt[r]{r}\,\mu_1$. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle, daß der reguläre Wert v größer oder kleiner gleich u_2 ist.

Sei zunächst $v > u_2$. In diesem Fall erhalten wir aus (3.5.1),(3.5.2),(3.5.8) und der gegebenen Schranke an $k(A)$ die Abschätzung

$$-\frac{d}{dv}A(v) \geq \frac{4\pi}{C \cdot A(v)^r}\, e^{2(v-\max u)}A(v),$$

und somit

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dv}A(v)^r \geq \frac{4\pi}{C}\, e^{2(v-\max u)}.$$

Die Menge der singulären Werte der Funktion u ist nach dem Lemma von Sard [Mi65, § 2] eine Nullmenge. Da diese Menge zudem abgeschlossen ist, erlaubt uns Lemma 3.5.2 nun, diese Gleichung von u_2 bis $\max u$ zu integrieren. Wir verwenden außerdem $A(\max u) = 0$ und erhalten

$$\frac{1}{r}A(u_2)^r \geq \frac{2\pi}{C}\, e^{-2\max u}\left(e^{2\max u} - e^{2u_2}\right) = \frac{2\pi}{C}\left(1 - e^{2(u_2-\max u)}\right).$$

Dies ergibt wegen $A(u_2) = \mu_2 = \sqrt[r]{r}\,\mu_1$ und $C{\mu_1}^r \leq \kappa$

$$1 - e^{2(u_2-\max u)} \leq \frac{C}{2\pi r}A(u_2)^r \leq \frac{\kappa}{2\pi}$$

und somit

$$(\max u) - u_2 \leq \frac{1}{2}\left|\log\left(1 - \frac{\kappa}{2\pi}\right)\right|. \tag{3.5.9}$$

Nun betrachten wir den Fall $v < u_2$. Aus Abschätzung (3.5.9) wissen wir, daß

$$\tilde{A}(u_2) \geq e^{-2\max u}A(u_2) = e^{-2\max u}\mu_2 \geq e^{-2u_2}\mu_3,$$

wobei wir

$$\mu_3 := \left(1 - \frac{\kappa}{2\pi}\right)\mu_2$$

setzen. Wir erhalten

$$\tilde{A}(v) \geq \int_v^{u_2} e^{-2\bar{v}}\left(-\frac{d}{d\bar{v}}A(\bar{v})\right)d\bar{v} \,+\, e^{-2u_2}\mu_3.$$

Über die singulären Werte $\bar{v}$ kann hinüber integriert werden, da eine monoton fallende Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ fast überall differenzierbar ist und $h(a) - h(b) \geq \int_a^b -h'(t)\,dt$ erfüllt.

Ungleichung (3.5.8) ergibt dann

$$-\frac{d}{dv}A(v) \geq \frac{4\pi}{\kappa}\,e^{2v}\left(\int_v^{u_2} e^{-2\bar{v}}\left(-\frac{d}{d\bar{v}}A(\bar{v})\right)d\bar{v} \,+\, e^{-2u_2}\mu_3\right).$$

Sei nun f die Lösung der zu dieser Integral-Ungleichung gehörenden Integral-Gleichung, d. h.

$$f(v) = \frac{4\pi}{\kappa}\,e^{2v}\left(\int_v^{u_2} e^{-2\bar{v}}f(\bar{v})\,d\bar{v} \,+\, e^{-2u_2}\mu_3\right).$$

Differentiation hiervon ergibt die Differential-Gleichung

$$\frac{d}{dv}f(v) = 2f(v) - \frac{4\pi}{\kappa}f(v)$$

mit Startwert $f(u_2) = (4\pi/\kappa)\mu_3$. Wir erhalten die Lösung

$$f(v) = \frac{4\pi}{\kappa}\,\mu_3\,e^{\left(\frac{4\pi}{\kappa}-2\right)(u_2-v)}.$$

Nach Lemma 3.5.3 wissen wir nun, daß

$$-\frac{d}{dv}A(v) \geq f(v) = \frac{4\pi}{\kappa}\,\mu_3\,e^{\left(\frac{4\pi}{\kappa}-2\right)(u_2-v)}$$

und Integration von 0 bis u_2 liefert mit Lemma 3.5.2 und $A(0) = \mu_0$

$$\mu_0 - \mu_2 \geq \mu_3\left(1 - \frac{\kappa}{2\pi}\right)^{-1}\left(e^{\left(\frac{4\pi}{\kappa}-2\right)u_2} - 1\right).$$

Also

$$\begin{aligned} u_2 &\leq \frac{\kappa}{4\pi - 2\kappa}\log\left(1 + \left(1 - \frac{\kappa}{2\pi}\right)\frac{(\mu_0 - \mu_2)}{\mu_3}\right) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi - 2\kappa}\log\left(\frac{\mu_0}{\sqrt[r]{r}\,\mu_1}\right) \end{aligned}$$

Dies ergibt zusammen mit (3.5.9) die Abschätzung des Satzes. □

Beweis von Korollar 3.5.5. Es gilt für beliebige offene Teilmengen $\widehat{G} \subset G$

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G},g} K_g &\leq \left\|K_g^+\right\|_{L^1(\widehat{G},g)} \\ &\leq \left\|K_g^+\right\|_{L^p(\widehat{G},g)} \operatorname{area}(\widehat{G},g)^{1/q} \leq \mathcal{K}_p^+ \left(\frac{\operatorname{area}(\widehat{G},g)}{\operatorname{area}(G,g)}\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Somit können wir Satz 3.5.4 anwenden mit $\kappa = \mathcal{K}_p^+$, $r = 1/q$, $C = \mathcal{K}_p^+ \operatorname{area}(G,g)^{-1/q}$ und $\mu_0 = \mu_1 = \operatorname{area}(G,g)$ und erhalten direkt die Formel des Korollars. $\square$

Beweis von Korollar 3.5.6. Aufgrund des Satzes von Gauß-Bonnet gilt

$$\left|\int_{\widehat{G},g} K_g\right| = \left|\int_{\mathbb{T}^2-\widehat{G},g} K_g\right|$$

für beliebige offene Teilmengen $\widehat{G} \subset G$. Deswegen ist

$$\left|\int_{\widehat{G},g} K_g\right| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2,g} |K_g| \leq \frac{1}{2}\mathcal{K}_p.$$

Andererseits ist für $\operatorname{area}(\widehat{G},g) < 2^{-q}\operatorname{area}(\mathbb{T}^2,g)$ die Abschätzung

$$\left|\int_{\widehat{G},g} K_g\right| \leq \|K_g\|_{L^p(\widehat{G},g)} \operatorname{area}(\widehat{G},g) \leq \mathcal{K}_p \left(\frac{\operatorname{area}(\widehat{G},g)}{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2,g)}\right)^{1/q}$$

besser.

Da alle Schleifen $\gamma : S^1 \to G$ in $\mathbb{T}^2$ zusammenziehbar sind, kann man die Menge G auf $\mathbb{R}^2$ liften.

Wir können deshalb Satz 3.5.4 mit $\kappa := (1/2)\,\mathcal{K}_p$, $r := 1/q$, $C := \mathcal{K}_p \operatorname{area}(\mathbb{T}^2,g)^{-1/q}$, $\mu_0 := \operatorname{area}(G,g) \leq \operatorname{area}(\mathbb{T}^2,g)$ und $\mu_1 := \min\{\mu_0, 2^{-q}\operatorname{area}(\mathbb{T}^2,g)\}$ anwenden. Dann gilt $\mu_0/\mu_1 \leq 2^q$. Also

$$\log \frac{\mu_0}{\sqrt[r]{r}\,\mu_1} \leq q\,\log(2q).$$ $\square$

Bemerkung. Diese Abschätzung von $\left|\int_{\widehat{G},g} K_g\right|$ können wir etwas verbessern. Wir setzen $a := \operatorname{area}(\widehat{G},g)^{1/q}$ und $b := \operatorname{area}(\mathbb{T}^2 - \widehat{G},g)^{1/q}$ und schätzen ab:

$$\left|\int_{\widehat{G},g} K_g\right| \leq \frac{b}{a+b}\left|\int_{\widehat{G},g} K_g\right| + \frac{a}{a+b}\left|\int_{\mathbb{T}^2-\widehat{G},g} K_g\right| \leq \frac{ab}{a+b}\|K_g\|_{L^p(\widehat{G}),g}$$

Dies führt zu einer verbesserten Abschätzung von $k(A(v))$.

Möchte man zu einem konkret gegebenen Torus eine verbesserte Abschätzung von $\max u$ in Korollar 3.5.6 erhalten, so kann man diese verbesserte Abschätzung von $k(A(v))$ direkt in Ungleichung (3.5.8) einsetzen und die Abschätzung von $\max u$ durch numerisches Auswerten der so erhaltenen Differential-Ungleichung verbessern.

SATZ 3.5.7. *Sei G eine beschränkte, offene Menge in $\mathbb{R}^2$ mit der flachen Standardmetrik $\tilde g = g_{\mathrm{eukl}}$. Ferner sei $u : \overline{G} \to \mathbb{R}_0^-$ eine glatte Funktion mit $u|_{\partial G} \equiv 0$. Wir setzen $g := e^{2u}\tilde g$. Für ein $p \in \,]1,\infty]$ sei $q := p/(p-1)$. Dann gilt*

$$\min u \geq -\frac{q\,\mathcal{K}_p^-(G,g)}{4\pi}.$$

Beweis von Satz 3.5.7. Diesmal definieren wir $\kappa := \mathcal{K}_p^-(G,g)$ und $G(v) := \{x \in G \mid u(x) < v\}$. Wie im Beweis von Satz 3.5.4 seien $A(v)$ und $l(v)$ bzw. $\tilde A(v)$ und $\tilde l(v)$ der Flächeninhalt von $G(v)$ und die Länge von $\partial G(v)$ bezüglich der Metrik g bzw. $\tilde g$. Auch hier gelten (3.5.2), (3.5.3) und (3.5.7). Hingegen müssen wir (3.5.1) und (3.5.5) modifizieren:

$$e^{2v}\tilde A(v) \geq A(v) \tag{3.5.10}$$
$$\int_{G(v),g} K_g = -\int_{\partial G(v),\tilde g} |du|_{\tilde g}.$$

Außerdem bekommen wir

$$k(v) := -\int_{G(v),g} K_g \leq \left\| K_g^- \right\|_{L^p(G(v)),g} \operatorname{area}(G(v),g)^{1/q} = \kappa \left(\frac{A(v)}{A(0)}\right)^{1/q}$$

Dann erhalten wir auch ein Analogon zu Ungleichung (3.5.8), allerdings mit anderem Vorzeichen:

$$\frac{d}{dv}\tilde A(v) \geq \frac{4\pi}{k(v)}\tilde A(v). \tag{3.5.11}$$

Schließlich bekommen wir analog zu (3.5.6)

$$\frac{d}{dv}\tilde A(v) \geq \frac{\tilde l(v)^2}{\kappa}\left(\frac{A(0)}{A(v)}\right)^{1/q}.$$

Mit (3.5.2), (3.5.7) und (3.5.10) ergibt sich hieraus

$$\frac{d}{dv}A(v) \geq \frac{4\pi}{\kappa}A(v)\left(\frac{A(0)}{A(v)}\right)^{1/q}.$$

Wir benutzen wieder Lemma 3.5.2 und das Lemma von Sard, um diese Gleichung von $\min u$ bis 0 zu integrieren, und erhalten

$$q\left(A(0)^{1/q} - A(\min u)^{1/q}\right) \geq \frac{4\pi}{\kappa}A(0)^{1/q}\,|\min u|,$$

und da wiederum $A(\min u) = 0$, impliziert dies

$$|\min u| \leq \frac{q\kappa}{4\pi}.$$

□

LEMMA 3.5.8. *Sei G eine offene Menge in $(\mathbb{T}^2, g)$ mit glattem Rand. Wir nehmen an, daß es geschlossene Kurven $c_1 : [0,1] \to G$ und $c_2 : [0,1] \to \mathbb{T}^2 - \overline{G}$ gibt, die als Kurven auf $\mathbb{T}^2$ betrachtet nicht null-homolog sind. Dann gilt*

$$\text{Länge}_g(\partial G) \geq 2 \operatorname{sys}_1\Big(\mathbb{T}^2, g\Big).$$

Beweis von Lemma 3.5.8. Fassen wir G als 2-Zykel auf. so ergibt sich unmittelbar, daß der Rand ∂G von G null-homolog ist. Wir zerlegen nun ∂G in seine Zusammenhangskomponenten $X_1, \ldots, X_k$, wobei jedes X_i diffeomorph zu S^1 ist.

Wir werden zeigen, daß nicht alle X_i null-homolog sind. Da aber ∂G null-homolog ist, gibt es mindestens zwei nicht null-homologe X_i. Für jedes nicht null-homologe X_i ist aber $\text{Länge}_g(X_i) \geq \operatorname{sys}_1(\mathbb{T}^2, g)$ und deswegen

$$\text{Länge}_g(\partial G) \geq \sum \text{Länge}_g(X_i) \geq 2 \operatorname{sys}_1\Big(\mathbb{T}^2, g\Big).$$

Angenommen alle X_i seien null-homolog. Sei $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ die universelle Überlagerung. Dann schreiben wir

$$\pi^{-1}(\partial G) = \dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} Y_i$$

als disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen S^1. Wir wählen nun Lifte $\tilde{c}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von c_i, d. h. $\pi\left(\tilde{c}_i(t+z)\right) = c_i(t)$ für alle $t \in [0,1]$, $z \in \mathbb{Z}$ und $i = 1, 2$ und wählen einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, der $\tilde{c}_1(0)$ mit $\tilde{c}_2(0)$ verbindet. Dann definieren wir I als die Menge aller i, für die Y_i die Spur von $\tilde{\gamma}$ trifft. Da I endlich ist, erhalten wir induktiv mit Hilfe des Jordan-Schoenfliesschen Kurvensatzes ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ mit Rand $\bigcup_{i \in I} Y_i$. Man überlegt sich nun leicht, daß entweder $\tilde{c}_1(0)$ oder $\tilde{c}_2(0)$ im Innern von K liegt.

Mit $\tilde{c}_i(0)$ liegt aber ganz $\tilde{c}_i(\mathbb{R})$ im Innern des Kompaktums K. Nun ist aber $\tilde{c}_i(\mathbb{R}) = \pi^{-1}\left(c_i([0,1])\right)$ abgeschlossen und somit kompakt, was wiederum bedeutet, daß c_i im Widerspruch zu unserer Annahme null-homolog ist. □

SATZ 3.5.9. *Der 2-Torus $\mathbb{T}^2$ trage eine Riemannsche Metrik $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit $\tilde{g}$ flach. Für alle regulären Werte $v \in \mathbb{R}$ von u sei $l(v)$ bzw. $\tilde{l}(v)$ die Länge der Höhenlinie $\{x \in \mathbb{T}^2 \mid u(x) = v\}$ bezüglich g bzw. $\tilde{g}$.*

(1) *Gilt für alle regulären $v \in [v_1, v_2]$ die Abschätzung $\tilde{l}(v) \geq \widetilde{L}_0 > 0$, so folgt*

$$v_2 - v_1 \;\leq\; \frac{\mathcal{K}_1(\mathbb{T}^2, g)\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})}{2\widetilde{L}_0{}^2}.$$

(2) *Gilt für alle regulären $v \in [v_1, v_2]$ die Abschätzung $l(v) \geq L_0 > 0$, so folgt*

$$v_2 - v_1 \;\leq\; \frac{\mathcal{K}_1(\mathbb{T}^2, g)\,\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g)}{2{L_0}^2}.$$

Zusammen mit Lemma 3.5.8 folgt daraus sofort:

KOROLLAR 3.5.10. *Der 2-Torus $\mathbb{T}^2$ trage eine Riemannsche Metrik $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit $\tilde{g}$ flach. Ferner seien nicht null-homologe geschlossene Wege $c_i : S^1 \to \mathbb{T}^2$ gegeben. Wir setzen*

$$v_1 := \max_{t \in S^1} u \circ c_1(t) \quad \textit{und} \quad v_2 := \min_{t \in S^1} u \circ c_2(t).$$

Dann gilt

(1)
$$v_2 - v_1 \;\leq\; \frac{\mathcal{K}_1(\mathbb{T}^2, g)\,\mathcal{V}(\tilde{g})}{8},$$

(2)
$$v_2 - v_1 \;\leq\; \frac{\mathcal{K}_1(\mathbb{T}^2, g)\,\mathcal{V}(g)}{8}.$$

Beweis von Satz 3.5.9. Wir setzen $\mathcal{K}_1 := \mathcal{K}_1(\mathbb{T}^2, g)$. Sei $v \in \,]v_1, v_2[$ ein regulärer Wert von u. Wie in den vorigen Sätzen sei $G(v) := \{x \in \mathbb{T}^2 \mid u(x) < v\}$, $A(v)$ der Flächeninhalt von $G(v)$ bezüglich g und $l(v)$ die Länge von $\partial G(v)$ bezüglich g. Außerdem gilt analog zu (3.5.5)

$$\int_{G(v),g} K_g = -\int_{\mathbb{T}^2 - G(v),g} K_g = \int_{\partial G(v)} * \, du$$

und somit

$$\int_{\partial G(v),\tilde{g}} |du|_{\tilde{g}} = \int_{\partial G(v),g} |du|_g = \int_{\partial G(v)} * \, du \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2,g} |K_g| \leq \frac{\mathcal{K}_1}{2}.$$

Wir erhalten nun

$$\frac{d}{dv}\tilde{A}(v) = \int_{\partial G(v),\tilde{g}} \frac{1}{|du|_{\tilde{g}}} \geq \frac{\tilde{l}(v)^2}{\int_{\partial G(v),\tilde{g}} |du|_{\tilde{g}}} \geq 2\,\frac{{\tilde{L}_0}^2}{\mathcal{K}_1}.$$

Mit Lemma 3.5.2 erhalten wir somit

$$\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) \geq \tilde{A}(v_2) - \tilde{A}(v_1) \geq 2\,\frac{{\tilde{L}_0}^2}{\mathcal{K}_1}\,(v_2 - v_1),$$

also die Behauptung (1).

Analog zeigen wir Behauptung (2):

$$\frac{d}{dv}A(v) = \int_{\partial G(v),g} \frac{1}{|du|_g} \geq \frac{l(v)^2}{\int_{\partial G(v),g} |du|_g} \geq 2\,\frac{{L_0}^2}{\mathcal{K}_1},$$

$$\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g) \geq A(v_2) - A(v_1) \geq 2\,\frac{{L_0}^2}{\mathcal{K}_1}\,(v_2 - v_1).$$ □

Alternativ könnten wir in Korollar 3.5.10 auch Behauptung (2) aus Behauptung (1) mit der später bewiesenen Proposition 3.7.2 herleiten.

Beweis von Theorem 3.5.1. Wir setzen wieder $G(v) := \{x \in \mathbb{T}^2 \mid u(x) > v\}$. Sei nun v_2 das Supremum aller $v \in \mathbb{R}$, für die es einen geschlossenen Weg $c_2 : S^1 \to G(v)$ gibt, der in $\mathbb{T}^2$ nicht null-homolog ist. Analog definieren wir $\widehat{G}(v) := \{x \in \mathbb{T}^2 \mid u(x) < v\}$, und sei v_1 das Infimum aller $v \in \mathbb{R}$, für die es einen geschlossenen Weg $c_1 : S^1 \to \widehat{G}(v)$ gibt, der in $\mathbb{T}^2$ nicht null-homolog ist.

Für jedes $\varepsilon > 0$ nehmen wir nun derartige $c_{1,\varepsilon}$ und $c_{2,\varepsilon}$ mit $v_{1,\varepsilon} := \max(u \circ c_{1,\varepsilon}) \leq v_1 + \varepsilon$ und $v_{2,\varepsilon} := \min(u \circ c_{2,\varepsilon}) \geq v_2 - \varepsilon$. Wir wenden Korollar 3.5.10 an und erhalten im Limes $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &\leq \frac{\mathcal{K}_1(\mathbb{T}^2, g)\,\mathcal{V}(\tilde{g})}{8} \\ &\leq \frac{\mathcal{K}_p(\mathbb{T}^2, g)\,\mathcal{V}(\tilde{g})}{8}. \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

Nun wenden wir Korollar 3.5.6 für $G := G(v)$, $v := v_2 + \varepsilon$ an, wobei wir u durch $u - v$ ersetzen. Wir erhalten im Limes $\varepsilon \to 0$

$$(\max u) - v_2 \leq \frac{1}{2}\left|\log\left(1 - \frac{\mathcal{K}_p}{4\pi}\right)\right| + \frac{\mathcal{K}_p}{8\pi - 2\mathcal{K}_p}\, q \log(2q), \tag{3.5.13}$$

wobei $q := p/(p-1)$.

Analog bekommen wir aus Satz 3.5.7

$$v_1 - (\min u) \leq \frac{q\,\mathcal{K}_p(G, g)}{4\pi}. \tag{3.5.14}$$

Addition der Ungleichungen (3.5.12), (3.5.13) und (3.5.14) ergibt schließlich die Behauptung (1).

Behauptung (2) zeigt man völlig analog oder mit Proposition 3.7.2. □

3.6 Flächeninhalt und Durchmesser

Dieser Abschnitt enthält einige Abschätzungen, die sich aus unseren Methoden aus Abschnitt 3.5 ergeben. Sie sind eigenständige Ergebnisse, d. h. wir werden sie in den nächsten Kapiteln nicht benötigen. Theorem 3.6.1 geht zwar in den Beweis von Theorem 3.7.7 ein, die nachfolgenden Kapitel sind aber so formuliert, daß sie ohne Theorem 3.7.7 auskommen. Leser, die nur an den Spektralabschätzungen und den Anwendungen auf die Willmore-Vermutung interessiert sind, können also diesen Abschnitt überspringen.

Zu Beginn wollen wir einige bereits bekannte isoperimetrische Ungleichungen mit den Methoden dieser Arbeit beweisen. Dieser Teil steht in enger Beziehung zu Toppings Abschätzungen aus [To97] und [To97a]. Anschließend soll eine Abschätzung des Flächeninhalts nach unten hergeleitet werden. Danach zeigen wir eine Abschätzung des Durchmessers. Die Abschätzungen des Flächeninhalts und des Durchmessers ergeben schließlich Korollar 3.6.8. Dieses Korollar gibt eine Schranke an den Durchmesser eines Riemannschen 2-Torus.

Definition. Eine *isoperimetrische flache Fläche* sei eine flache, kompakte und zusammenhängende Riemannsche 2-Mannigfaltigkeit $(G, \tilde{g})$ mit Rand, so daß jede offene Teilmenge $\widehat{G} \subset G$ die isoperimetrische Ungleichung

$$4\pi \operatorname{area}(\widehat{G}) \leq \text{Länge}_{\tilde{g}}(\partial \widehat{G})$$

erfüllt.

Ist G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und $\tilde{g}$ die euklidische Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$, dann ist $(G, \tilde{g})$ eine isoperimetrische flache Fläche. Für jede flache Metrik $\tilde{g}$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe D ist $(D, \tilde{g})$ eine isoperimetrische flache Fläche. Die Ungleichungen des letzten Abschnitts gelten sinngemäß für alle isoperimetrischen flachen Flächen $(G, \tilde{g})$.

Die glatte Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ erfülle nun die Randbedingung $u|_{\partial G} \equiv 0$. Je nach Resultat werden wir oft zusätzlich $u \geq 0$ oder $u \leq 0$ fordern. Ferner sei $g := e^{2u}\tilde{g}$, $A := \operatorname{area}(G, g)$ und $\tilde{A} := \operatorname{area}(G, \tilde{g})$.

Um die Abschätzungen des Flächeninhalts formulieren zu können, definieren wir zunächst die K_*-Funktion. Sei K die Gaußsche Krümmung bezüglich g. Dann ist K_* definiert als die eindeutig bestimmte monoton fallende Funktion $K_* :]0, A[\to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{area}\Big(\{p \in G \mid K(p) \geq s\}, g\Big) = \sup\{a \in]0, A[\mid K_*(a) \geq s\}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Man sieht sofort

$$\begin{aligned} K_*(a) &= \sup\Big\{s \;\Big|\; \operatorname{area}\Big(\{p \in G \mid K(p) \geq s\}, g\Big) \geq a\Big\} \\ &= \sup_{\substack{\widehat{G} \subset G \\ \operatorname{area}(\widehat{G}) = a}} \min_{p \in \widehat{G}} K(p) = \inf_{\substack{\widehat{G} \subset G \\ \operatorname{area}(\widehat{G}) = A - a}} \max_{p \in \widehat{G}} K(p). \end{aligned}$$

Außerdem definieren wir $K_*^+ := \max\{K_*, 0\}$ und $K_*^- := \min\{K_*, 0\} \leq 0$.

THEOREM 3.6.1. *Sei $u : G \to \mathbb{R}_0^+$ eine glatte Funktion auf der isoperimetrischen flachen Fläche $(G, \tilde{g})$ mit $u|_{\partial G} \equiv 0$. Wir setzen $g := e^{2u}\tilde{g}$. Wie oben definieren wir K_*. Dann erfüllen die Flächeninhalte $A := \operatorname{area}(G, g)$ und $\tilde{A} := \operatorname{area}(G, \tilde{g})$ die folgende Ungleichung:*

$$2\pi A - \int_0^A (A - a)\, K_*(a)\, da \leq 2\pi \tilde{A}.$$

Beweis. Da die Morse-Funktionen dicht in der C^2-Topologie liegen [Hir76, Theorem 6.1.2], können wir o. B. d. A. annehmen, daß u eine Morse-Funktion ist. Wir definieren wieder wie im Beweis von Satz 3.5.4: $G(v) := \{x \in G \,|\, u(x) > v\}$, $A(v) := \operatorname{vol}(G(v), g)$, $\tilde{A}(v) := \operatorname{vol}(G(v), \tilde{g})$ und

$$\begin{aligned} k(\widehat{A}) &:= \sup \left\{ \int_{\widehat{G}, g} K_g \;\middle|\; \widehat{G} \text{ offene Menge in } G, \operatorname{area}(\widehat{G}, g) = A \right\}. \\ &= \int_0^{\widehat{A}} K_*(a)\, da. \end{aligned}$$

Da u auf ∂G verschwindet und $\operatorname{grad} u$ dort nach innen gerichtet ist, wissen wir aufgrund von Gleichung (3.5.5), daß $0 \leq k(A) \leq k(\widehat{A})$ für alle $\widehat{A} \in [0, A]$ gilt. Deswegen schreibt sich die Ungleichung (3.5.8) auch als

$$\left(-\frac{d}{dv}\tilde{A}(v)\right) \int_0^{A(v)} K_*(a)\, da \geq 4\pi \tilde{A}(v)$$

für alle regulären Werte v von u. Wir multiplizieren die Ungleichung mit e^{2v} und wenden Gleichung (3.5.2) an:

$$-\frac{d}{dv} \int_0^{A(v)} \Big(A(v) - a\Big)\, K_*(a)\, da \geq 2\pi\, \frac{d}{dv} \left(\tilde{A}(v) e^{2v} - A(v)\right).$$

Diese Gleichung wollen wir von $v = 0$ bis $v = \max u$ integrieren. Nun haben wir angenommen, daß u eine Morse-Funktion ist. Wir schneiden kleine ε-Bälle um die endlich vielen singulären v aus dem Integrationsbereich heraus. Die Änderung des Integralwerts wird klein für $\varepsilon \to 0$. Wir können also formal integrieren, ohne auf die Singularitäten achten zu müssen, und erhalten

$$\int_0^{A(0)} \Big(A(0) - a\Big)\, K_*(a)\, da \geq 2\pi A(0) - 2\pi \tilde{A}(0).$$

Da nach unserer Annahme u eine Morse-Funktion ist, gilt $A(0) = A$ und $\tilde{A}(0) = \tilde{A}$.
□

Für den Fall, daß G homöomorph zu einer Kreisscheibe ist und einen glatten Rand besitzt, erhalten wir aus Theorem 3.6.1 ein wichtiges Korollar (Korollar 3.6.2), für dessen Formulierung wir zunächst eine Definition benötigen. Ist g eine Riemannsche Metrik auf der abgeschlossenen Kreisscheibe D, dann gibt es nach [GiT77, Theorem 6.8] eine Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ mit $\Delta_g u = K_g$ und $u|_{\partial D} \equiv 0$. Nach Gleichung (3.1.1) ist $\tilde{g} := e^{-2u} g$ flach. Man überlegt sich leicht, daß die Fläche $(D, \tilde{g})$ die folgende Charakterisierung hat: Ist $F : (D, g) \to (M, g_M)$ ein konformer Diffeomorphismus auf eine berandete, flache Riemannsche Fläche (M, g_M) und ist $F|_{\partial D}$ eine Isometrie, dann ist $F : (D, \tilde{g}) \to (M, g_M)$ eine Isometrie.

Definition. Den Flächeninhalt $\widetilde{\mathrm{area}}(D, g) := \mathrm{area}(D, \tilde{g})$ nennen wir den *ebenen Flächeninhalt* von (D, g).

KOROLLAR 3.6.2. *Jede Metrik g auf D erfüllt:*

$$2\pi A - \int_0^A (A - a)\, K_*^+(a)\, da \leq 2\pi \tilde{A},$$

wobei $A := \mathrm{area}(D, g)$, $\tilde{A} := \widetilde{\mathrm{area}}(D, g)$ und K_*^+ die oben definierte K_*^+-Funktion ist.

Beweis. Sei G das Innere von $\{p \in D \mid u(p) > 0\}$. Wir wenden auf G das vorangehende Theorem an. Nach Abschwächung der Ungleichung von K_* auf K_*^+ können wir auch den Flächeninhalt von $\{p \in D \mid u(p) \leq 0\}$ hinzufügen. $\square$

Nach der isoperimetrischen Ungleichung für einfach zusammenhängende flache Flächen erhalten wir

$$4\pi\, \widetilde{\mathrm{area}}(D, g) \leq \mathrm{Länge}_g(\partial D)^2.$$

Somit ergibt sich eine abgeschwächte Form der isoperimetrischen Ungleichung von Topping:

KOROLLAR 3.6.3 (Topping [To97, To97a]). *Es sei g eine Riemannsche Metrik auf der Kreisscheibe D. Wir setzen $A := \mathrm{area}(D, g)$ und $L := \mathrm{Länge}_g(\partial G)$. Die K_*-Funktion sei wie oben definiert. Dann haben wir*

$$4\pi A \leq L^2 + 2 \int_0^A (A - a)\, K_*^+(a)\, da.$$

Toppings isoperimetrische Ungleichung enthält K_* anstelle von K_*^+. Der hier vorgestellte Beweis des obigen Korollars war auch schon Topping bekannt und wurde in einer Fußnote von [To97] erwähnt, aber nie genauer ausformuliert, da [To97a] bessere Ergebnisse liefert. Topping folgerte aus seiner Abschätzung einige klassische Abschätzungen. Wir erhalten teilweise abgeschwächte Versionen. Weitergehende Informationen zu isoperimetrischen Ungleichungen dieser Art findet man auch in [Ban80], [Os78] und [BuZ88, 1 § 2.2.3].

KOROLLAR 3.6.4. *Sei g eine Riemannsche Metrik auf der abgeschlossenen Kreisscheibe D. Wir setzen $A := \mathrm{area}(D, g)$ und $L := \mathrm{Länge}_g(\partial D)$. Dann gilt:*

(1) **(Alexandrov, schwache Version)** *Für alle $K_0 \in \mathbb{R}_0^+$ gilt*

$$4\pi A \leq L^2 + K_0 A^2 + 2A \int_{D,g} (K - K_0)^+.$$

(2) **(Fiala-Huber)**

$$4\pi A \leq L^2 + 2A \int_{D,g} K^+.$$

(3) **(Bol, schwache Version)** *Für $K \leq K_0 \in \mathbb{R}_0^+$ gilt*

$$4\pi A \leq L^2 + A^2 K_0.$$

(4) **(Bernstein-Schmidt, schwache Version)** *Für konstantes $K \in \mathbb{R}_0^+$ gilt*

$$4\pi A \leq L^2 + KA^2.$$

Alle bisherigen Abschätzungen schätzen den Flächeninhalt einer Fläche nach oben ab. Im folgenden wollen wir aber auch einige Abschätzungen herleiten, die den Flächeninhalt nach unten abschätzen. Hierbei wollen wir weitgehend analog zu obigen Abschätzungen vorgehen. Da jedoch eine „Umkehrung“ der isoperimetrischen Ungleichung nicht einmal für flache Flächen existiert, ist es nicht möglich, den Flächeninhalt durch die Länge des Randes und eine Gaußsche Krümmungsgröße abzuschätzen. Ersetzen wir jedoch wieder die Länge des Randes durch den ebenen Flächeninhalt, so bekommen wir Abschätzungen.

THEOREM 3.6.5. *Sei $u : G \to \mathbb{R}_0^-$ eine glatte Funktion auf der isoperimetrischen flachen Fläche $(G, \tilde{g})$ mit $u|_{\partial G} \equiv 0$. Wir setzen $g := e^{2u}\tilde{g}$. Wie oben definieren wir K_*. Dann erfüllen die Flächeninhalte $A := \mathrm{area}(G, g)$ und $\tilde{A} := \mathrm{area}(G, \tilde{g})$ die folgende Ungleichung:*

$$2\pi A \geq 2\pi\tilde{A} + \int_0^A a\, K_*(a)\, da.$$

Beweis. Wir definieren nun $G(v)$, $A(v)$, $\tilde{A}(v)$ und $k(v)$ genauso wie im Beweis von Satz 3.5.7. Sei wieder u o. B. d. A. eine Morse-Funktion. Diesmal gilt für regulären Werte v von u

$$0 \leq k(v) \leq -\int_0^{A(v)} K_*(A - a)\, da.$$

Deswegen ergibt Ungleichung (3.5.11)

$$-\Big(\frac{d}{dv}\tilde{A}(v)\Big) \int_0^{A(v)} K_*(A - a)\, da \geq 4\pi\tilde{A}(v).$$

Wir multiplizieren wieder mit e^{2u} und wenden Gleichung (3.5.2) an:

$$-\frac{d}{dv}\int_0^{A(v)}\Big(A(v)-a\Big)\,K_*(A-a)\,da \geq 2\pi\,\frac{d}{dv}\Big(\tilde{A}(v)e^{2v}-A(v)\Big).$$

Diesmal integrieren wir von $\min u$ bis 0 und erhalten

$$-\int_0^A (A-a)\,K_*(A-a)\,da \geq 2\pi\tilde{A}-2\pi A,$$

was wiederum die Behauptung ergibt. □

KOROLLAR 3.6.6. *Jede Metrik g auf D erfüllt:*

$$2\pi A \geq 2\pi\tilde{A}+\int_0^A a\,K_*^-(a)\,da,$$

wobei $A := \mathrm{area}(D,g)$, $\tilde{A} := \widetilde{\mathrm{area}}(D,g)$ und K_*^- die oben definierte K_*^--Funktion ist.

Beweis. Sei G das Innere von $\{p \in D \mid u(p) < 0\}$. Wir wenden hierauf das vorangehende Theorem an. Nach Abschwächung der Ungleichung von K_* auf K_*^- können wir auch den Flächeninhalt von $\{p \in D \mid u(p) \geq 0\}$ hinzufügen. □

Wir wollen uns nun der Durchmesser-Abschätzung zuwenden.

Definition. Ist G eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), so können wir darauf auf natürliche Art und Weise zwei verschiedene Distanzfunktionen auf G definieren. Die *intrinsische Distanz* der Punkte x und y aus G ist das Infimum der Längen aller Wege $c : [0,1] \to G$ von x nach y. Die *extrinsische Distanz* der Punkte x und y aus G ist das Infimum der Längen aller Wege $c : [0,1] \to M$ von x nach y. Der *intrinsische Durchmesser* $\mathrm{diam}(G,g)$ ist das Supremum der intrinsischen Distanz über aller x und y, und der *extrinsische Durchmesser* $\mathrm{diam}(G,M,g)$ das Supremum der extrinsischen Distanz.

SATZ 3.6.7. *Sei $(G,\tilde{g})$ eine beschränkte offene Teilmenge in $\mathbb{R}^2$ und sei $\tilde{g} = g_{\mathrm{eukl}}$ die euklidische Standardmetrik. Ferner sei $u : \overline{G} \to \mathbb{R}_0^+$ eine glatte Funktion mit $u|_{\partial G} \equiv 0$ und $g = e^{2u}\tilde{g}$ eine weitere Riemannsche Metrik. Für die Gaußsche Krümmung K_g bezüglich g gelte*

$$\kappa := \int_G K_g^+ \,\mathrm{dvol}_g < 2\pi.$$

(1) *Ist G zusammenhängend, dann gilt:*

$$1 \leq \frac{\operatorname{diam}(G,g)}{\operatorname{diam}(G,\tilde{g})} \leq \frac{2\pi}{2\pi-\kappa}\left(\frac{\pi^2 e}{4}\right)^{\frac{\kappa}{4\pi}} + \sqrt{e}.$$

(2) *Wenn wir g so auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen, daß $g(v,v) \leq \tilde{g}(v,v)$ für jedes $v \in T_x\mathbb{R}^2, x \notin G$, dann gilt die Abschätzung*

$$\frac{\operatorname{diam}(G,\mathbb{R}^2,g)}{\operatorname{diam}(G,\mathbb{R}^2,\tilde{g})} \leq \frac{2\pi}{2\pi-\kappa}\left(\frac{\pi^2 e}{4}\right)^{\frac{\kappa}{4\pi}} + \sqrt{e}.$$

Bemerkung. Eine Durchmesserabschätzung auf Flächen mit Hilfe anderer Daten findet man in [BuZ88, 1 § 4.5.2]. Dort wird jedoch kein Vergleich mit der zugeordneten ebenen Fläche gemacht.

Beweis. Sei $M = G$ oder $M = \mathbb{R}^2$. Sei wieder $G(v) := \{x \in G \,|\, u(x) > v\}$, $A(v) = \operatorname{area}(G(v), g)$, $\tilde{A}(v) = \operatorname{area}(G(v), \tilde{g})$.

Es gilt analog zu Ungleichung (3.5.8) in allen regulären Werten v von u

$$-\frac{d}{dv}\tilde{A}(v) \geq \frac{4\pi}{\kappa}\tilde{A}(v),$$

und Integration liefert mit Hilfe von Lemma 3.5.2 wiederum für alle $v \in [0, \max u]$

$$-\log \tilde{A}(v) + \log \tilde{A}(0) \geq \frac{4\pi}{\kappa} v. \tag{3.6.1}$$

Durch Integrieren von Ungleichung (3.5.6) erhalten wir dann

$$\frac{1}{\kappa}\int_v^{\max u} \tilde{l}(w)^2\, dw \leq \tilde{A}(v) \leq e^{-\frac{4\pi}{\kappa}v}\, \tilde{A}(0). \tag{3.6.2}$$

Wir definieren nun für eine beschränkte offene Teilmenge $A \subset \overline{M}$ die minimale Randlänge

$$\operatorname{MRL}(A) := \inf\Big\{\text{Länge}_{\tilde{g}}(\partial B) \mid A \subset B \subset \overline{M},\ \partial B \text{ rektifizierbar}\Big\}.$$

Dann gilt für $v' := v + \frac{\kappa}{4\pi}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{MRL}\big(G(v')\big)^2 &\leq \min\Big\{\tilde{l}(w)^2 \,\Big|\, w \in [v, v']\Big\} \\ &\leq \frac{4\pi}{\kappa}\int_v^{v'} \tilde{l}(w)^2\, dw \\ &\leq 4\pi\, e^{-\frac{4\pi}{\kappa}v}\, \tilde{A}(0)\end{aligned}$$

Nun sei $c : [a,b] \to \bar{M}$ eine nach Bogenlänge parametrisierte kürzeste Verbindung in $\overline{M}$ bezüglich $\tilde{g}$. Es gilt

$$\mathrm{MRL}\Big(G(v')\Big) \geq \mathrm{MRL}\Big(G(v') \cap \operatorname{bild} c\Big) = 2\,\text{Länge}_{\tilde{g}}\Big(G(v') \cap \operatorname{bild} c\Big).$$

Deswegen ist die Länge des Teils von c, der in $G(v')$ verläuft, durch

$$e^{-\frac{2\pi}{\kappa}v}\sqrt{\pi\tilde{A}(0)} = e^{-\frac{2\pi}{\kappa}v'}\sqrt{\pi e\tilde{A}(0)}$$

beschränkt, sofern $v' \geq \kappa/(4\pi)$.

Für $W \geq \sqrt{e}$ ist somit das Maß der Menge

$$m(W) := \Big\{t \in [a,b] \,\Big|\, \exp(u \circ c(t)) > W\Big\}$$

kleiner oder gleich

$$\sqrt{\pi e\tilde{A}(0)}\, W^{-\frac{2\pi}{\kappa}}.$$

Für alle $W > 0$ wird das Maß von $m(W)$ natürlich durch $\text{Länge}_{\tilde{g}}(c)$ beschränkt. Die Länge von c bezüglich g berechnet sich nun als

$$\begin{aligned}
\text{Länge}_g(c) &= \int_a^b \exp(u \circ c(t))\, dt \\
&= \int_0^\infty \text{Maß von } m(W)\, dW \\
&\leq \int_{\sqrt{e}}^\infty \min\Big\{\text{Länge}_{\tilde{g}}(c), \sqrt{\pi e\tilde{A}(0)}\, W^{-\frac{2\pi}{\kappa}}\Big\}\, dW + \sqrt{e}\,\text{Länge}_{\tilde{g}}(c)
\end{aligned}$$

Wir definieren nun W_0 durch

$$\text{Länge}_{\tilde{g}}(c) = \sqrt{\pi e\tilde{A}(0)}\, {W_0}^{-\frac{2\pi}{\kappa}}$$

und berechnen weiter:

$$\begin{aligned}
\text{Länge}_g(c) &\leq \int_0^\infty \min\Big\{\text{Länge}_{\tilde{g}}(c), \sqrt{\pi e\tilde{A}(0)}\, W^{-\frac{2\pi}{\kappa}}\Big\}\, dW + \sqrt{e}\,\text{Länge}_{\tilde{g}}(c) \\
&= W_0\,\text{Länge}_{\tilde{g}}(c) + \sqrt{\pi e\tilde{A}(0)} \int_{W_0}^\infty W^{-\frac{2\pi}{\kappa}}\, dW + \sqrt{e}\,\text{Länge}_{\tilde{g}}(c) \\
&= W_0\,\text{Länge}_{\tilde{g}}(c) + \sqrt{\pi e\tilde{A}(0)}\, \frac{\kappa}{2\pi - \kappa}\, {W_0}^{1-\frac{2\pi}{\kappa}} + \sqrt{e}\,\text{Länge}_{\tilde{g}}(c) \\
&= \frac{2\pi}{2\pi - \kappa}\, \Big(\pi e\tilde{A}(0)\Big)^{\frac{\kappa}{4\pi}}\, \text{Länge}_{\tilde{g}}(c)^{1-\frac{\kappa}{2\pi}} + \sqrt{e}\,\text{Länge}_{\tilde{g}}(c).
\end{aligned}$$

Die isodiametrische Ungleichung besagt, daß $4\,\mathrm{area} \leq \pi\,\mathrm{diam}^2$ für ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$. Diese Ungleichung wird z. B. in [Sch93, (6.2.6)] für konvexe Gebiete gezeigt. Mit Hilfe des konvexen Abschlusses sieht man dann aber, daß die Aussage für beliebige beschränkte offene Mengen folgt. Sie gilt sowohl für den intrinsischen, als auch den extrinsischen Durchmesser. Wir haben also $4\tilde{A}(0) \leq \pi \operatorname{diam}^2(G, M, \tilde{g})$. Damit erhalten wir

$$\text{Länge}_g(c) \leq \frac{2\pi}{2\pi - \kappa} \text{Länge}_{\tilde{g}}(c)^{1-\frac{\kappa}{2\pi}} \left(\frac{\pi^2 e}{4}\right)^{\frac{\kappa}{4\pi}} \operatorname{diam}(G, M, \tilde{g})^{\frac{\kappa}{2\pi}} + \sqrt{e}\, \text{Länge}_{\tilde{g}}(c) \tag{3.6.3}$$

und somit

$$\operatorname{diam}(G, M, g) \leq \left[\frac{2\pi}{2\pi - \kappa} \left(\frac{\pi^2 e}{4}\right)^{\frac{\kappa}{4\pi}} + \sqrt{e}\right] \operatorname{diam}(G, M, \tilde{g}). \qquad \square$$

Man beachte, daß Gleichung (3.6.3) auch für beliebige absolut minimierende Kurven $c : [a, b] \to \overline{M}$ gilt und nicht nur für Kurven, die den Durchmesser realisieren. Wir können Gleichung (3.6.3) auch in einer anderen Situation einsetzen und erhalten somit aus dem obigen Beweis ein Korollar.

KOROLLAR 3.6.8. *Es gibt eine Funktion* $\mathcal{S}_2 : [0, 4\pi[\times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *so daß jede Metrik* g *auf* $\mathbb{T}^2$ *mit Totalkrümmung* $\mathcal{K}_1 := \int_{\mathbb{T}^2} |K_g| \operatorname{dvol}_g < 4\pi$ *erfüllt:*

$$\frac{\operatorname{diam}^2(\mathbb{T}^2, g)}{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g)} \leq \mathcal{S}_2\Big(\mathcal{K}_1, \widetilde{\mathcal{V}}(g)\Big) \leq \mathcal{S}_2\Big(\mathcal{K}_1, \mathcal{V}(g)\Big).$$

Beispiel 1. Für die Kegelmetrik $g_{R,H,\beta}$ mit $\beta > 0$ erhalten wir eine Schranke an den Durchmesser:

$$\frac{\operatorname{diam}^2\Big(\mathbb{T}^2, g_{R,H,\beta}\Big)}{\operatorname{area}\Big(\mathbb{T}^2, g_{R,H,\beta}\Big)} \leq \mathcal{S}_2\Big(4\pi(1 - \sin\beta), 1\Big).$$

Beispiel 2. Für die Pinocchio-Metriken $g_{R,H,0}$ ist $\mathcal{K}_1 = 4\pi$. Die Voraussetzungen des Korollars sind also nicht erfüllt. Man sieht auch leicht, daß der Durchmesser $\operatorname{diam}(\mathbb{T}^2, g_{R,H,0})$ größer als H ist. Wir wählen nun $R = R(H)$ so, daß $\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g_{R(H),H,0})$ konstant in H ist. Dann gilt

$$\frac{\operatorname{diam}^2(\mathbb{T}^2, g_{R(H),H,0})}{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g_{R(H),H,0})} \to \infty.$$

Deswegen ist die Voraussetzung $\mathcal{K}_1 < 4\pi$ im Korollar notwendig.

Beweis von Korollar 3.6.8. Wir definieren v_1 und v_2 wie im Beweis von Theorem 3.5.1. Wir wissen, daß $l(v_2) \geq 2\operatorname{sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g})$. Leider können wir aber $l(v_2)$ nicht geeignet nach oben abschätzen. Wir definieren deswegen

$$\hat{v}_2 := \inf\left\{v > v_2 \,\Big|\, \tilde{l}(v) < \operatorname{sys}_1\Big(\mathbb{T}^2, \tilde{g}\Big)\right\}.$$

Somit ist $l(\hat{v}_2)$ mindestens um den Faktor 2 kleiner als $l(v_2)$.

Wir können nun $G(\hat{v}_2)$ so auf $\mathbb{R}^2$ liften, daß für dessen Lift $\widehat{G}$ gilt

$$\operatorname{diam}(\widehat{G}, \mathbb{R}^2, \tilde{g}) \leq 3 \operatorname{diam}\Big(G(\hat{v}_2), \mathbb{T}^2, \tilde{g}\Big) + 2 \operatorname{diam}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) \leq 5 \operatorname{diam}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})$$

Aus Ungleichung (3.6.3) folgt dann

$$\operatorname{diam}(\mathbb{T}^2, g) \leq \left[\frac{100\,\pi}{4\pi - \mathcal{K}_1} \left(\frac{\pi^2 e}{4}\right)^{\frac{\mathcal{K}_1}{8\pi}} + \sqrt{e} \right] \operatorname{diam}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})\, e^{\hat{v}_2}.$$

Auf die offene Menge $\{u < v_1\} := \{x \in \mathbb{T}^2 \mid u(x) < v_1\}$, versehen mit der Metrik g, wenden wir nun Theorem 3.6.5 an. Das zugehörige Integral über die K_*-Funktion wollen wir so abschätzen:

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{\operatorname{area}(\{u<v_1\},g)} a K_*(a) \right| &\leq \operatorname{area}\Big(\{u < v_1\}, g\Big) \left| \int_{\{u<v_1\}} K_g \operatorname{dvol}_g \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \mathcal{K}_1 \operatorname{area}\Big(\{u < v_1\}, g\Big).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(4\pi + \mathcal{K}_1) \operatorname{area}\Big(\{u < v_1\}, g\Big) \geq 4\pi \operatorname{area}\Big(\{u < v_1\}, \tilde{g}\Big)\, e^{2v_1}$$

und somit

$$(4\pi + \mathcal{K}_1) \operatorname{area}\Big(\mathbb{T}^2, g\Big) \geq 4\pi \operatorname{area}\Big(\mathbb{T}^2, \tilde{g}\Big)\, e^{2v_1}.$$

Wir wenden Satz 3.5.9 (1) an mit $\tilde{L}_0 = \operatorname{sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g})$ und erhalten

$$2(\hat{v}_2 - v_1) \leq \mathcal{K}_1 \mathcal{V}(\tilde{g}).$$

Es gilt somit

$$\frac{\operatorname{diam}^2(\mathbb{T}^2, g)}{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g)} \leq \frac{\operatorname{diam}^2(\mathbb{T}^2, \tilde{g})}{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})} \exp\Big(\mathcal{K}_1 \mathcal{V}(\tilde{g})\Big)\, f(\mathcal{K}_1),$$

wobei

$$f(\mathcal{K}_1) := \left[\frac{100\,\pi}{4\pi - \mathcal{K}_1} \left(\frac{\pi^2 e}{4}\right)^{\frac{\mathcal{K}_1}{8\pi}} + \sqrt{e} \right]^2 \frac{4\pi + \mathcal{K}_1}{4\pi}.$$

Auf dem flachen Torus können wir den Durchmesser explizit abschätzen:

$$\begin{aligned}\operatorname{sys}_1\Big(\mathbb{T}^2, \tilde{g}\Big) &\leq \ell_2(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) \leq \frac{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})}{\operatorname{sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g})} + \frac{1}{2} \operatorname{sys}_1\Big(\mathbb{T}^2, \tilde{g}\Big) \\ \operatorname{diam}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) &\leq \frac{1}{2} \Big(\operatorname{sys}_1\Big(\mathbb{T}^2, \tilde{g}\Big) + \ell_2(\mathbb{T}^2, \tilde{g})\Big) \leq 2\, \frac{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})}{\operatorname{sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g})}\end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{diam}^2(\mathbb{T}^2,g)}{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2,g)} &\le 4\,\mathcal{V}(\tilde g)\exp\Big(\mathcal{K}_1\mathcal{V}(\tilde g)\Big)f(\mathcal{K}_1)\\ &\le 4\,\mathcal{V}(g)\exp\Big(\mathcal{K}_1\mathcal{V}(g)\Big)f(\mathcal{K}_1)\end{aligned}$$

wobei wir bereits die Ungleichung $\mathcal{V}(\tilde g) \le \mathcal{V}(g)$ benutzt haben, die wir in Proposition 3.7.2 zeigen werden. □

3.7 Abschätzung von $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, spin-$\mathcal{V}$ und spin-$\mathcal{W}$

In diesem Abschnitt wollen wir die Größenpaare $\mathcal{V}(g)$ und $\widetilde{\mathcal{V}}(g)$, $\mathcal{W}(g)$ und $\widetilde{\mathcal{W}}(g)$, spin-$\mathcal{V}(g,\chi)$ und spin-$\widetilde{\mathcal{V}}(g,\chi)$, spin-$\mathcal{W}(g,\chi)$ und spin-$\widetilde{\mathcal{W}}(g,\chi)$ gegenseitig abschätzen.

Die konforme Invariante $\widetilde{\mathcal{V}}(g)$ ist unter anderem deswegen interessant, weil für das konforme Volumen $V_c(n,\mathbb{T}^2,g)$ nach Li und Yau [LiY82] gilt:

$$V_c(n,\mathbb{T}^2,g) \ge \frac{2\pi^2}{\widetilde{\mathcal{V}}(g)}.$$

Gleichzeitig zeigten Li und Yau, daß das konforme Volumen eine untere Schranke an das Willmore-Integral W (siehe Abschnitt 5.1) ist. Sie haben somit bewiesen, daß alle konform immersierten Tori $(\mathbb{T}^2,g)$ mit $\widetilde{\mathcal{V}}(g) \le 1$ die Willmore-Vermutung (siehe Abschnitt 5.1) erfüllen.

Wollen wir nun für einen gegebenen 2-Torus entscheiden, ob er zu dieser Klasse gehört, dann benötigen wir eine Abschätzung von $\widetilde{\mathcal{V}}(g)$. In der vorliegenden Arbeit ist es jedoch genauso wichtig, die anderen oben genannten konformen und spinkonformen Invarianten abschätzen zu können.

Die Abschätzungen dieses Abschnitts vergleichen nun $\widetilde{\mathcal{V}}(g) = \mathcal{V}(\tilde g)$ mit $\mathcal{V}(g)$, entsprechendes gilt für die anderen Invarianten.

Die bekannteste Abschätzung von $\mathcal{V}(g)$ ist wohl ein Satz von Loewner, der jedoch von ihm selbst gar nicht veröffentlicht wurde. Literatur hierzu und zu dem verwandten Satz von Pu findet man in [Gr81, 4.1], [Pu52], [Be70], [Be72] und [Be65].

THEOREM 3.7.1 (Loewner). *Für einen 2-Torus $\mathbb{T}^2$ mit Metrik g gilt*

$$\mathcal{V}(g) := \frac{\operatorname{area}(\mathbb{T}^2,g)}{\operatorname{sys}_1(\mathbb{T}^2,g)^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Und Gleichheit gilt genau dann, wenn g flach ist und $(\mathbb{T}^2, g)$ der gleichseitige Torus ist, d. h. er ist in der konformen Äquivalenzklasse des 2-Torus

$$\frac{\mathbb{R}^2}{\langle(1,0),(1/2,\sqrt{3}/2)\rangle}.$$

Der Beweis dieses Theorems ist recht kurz. Zunächst überlegt man sich, daß es für flache Metriken gilt. Der allgemeine Fall folgt dann aus der Proposition:

PROPOSITION 3.7.2. *Sei $g = e^{2u}\tilde{g}$ eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{T}^2$, und sei $\tilde{g}$ flach. Für $v \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$ setzen wir*

$$\mathcal{L}_g(v) := \min\left\{\text{Länge}_g(c) \;\middle|\; c : S^1 \to \mathbb{T}^2 \text{ repräsentiert } v\right\},$$

analog für $\mathcal{L}_{\tilde{g}}(v)$. Dann gilt

$$\frac{\mathcal{L}_g(v)^2}{\text{area}(\mathbb{T}^2, g)} \leq \frac{\mathcal{L}_{\tilde{g}}(v)^2}{\text{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})}.$$

Unter anderem haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(g) &\geq \mathcal{V}(\tilde{g}) \\ \mathcal{W}(g) &\geq \mathcal{W}(\tilde{g}) \\ \text{spin-}\mathcal{V}(g,\chi) &\geq \text{spin-}\mathcal{V}(\tilde{g},\chi) \\ \text{spin-}\mathcal{W}(g,\chi) &\geq \text{spin-}\mathcal{W}(\tilde{g},\chi) \end{aligned}$$

für alle nicht-trivialen Spin-Homomorphismen χ.

Beweis der Proposition. Sei o. B. d. A. $\tilde{g}$ die Standardmetrik auf $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$ für ein Gitter Γ.

Es gilt zum einen

$$\text{area}(\mathbb{T}^2, g) = \int_{\mathbb{T}^2,\tilde{g}} e^{2u}.$$

Sei nun c ein Repräsentant minimaler Länge bezüglich $\tilde{g}$ von v. Da Verschiebungen isometrisch bezüglich $\tilde{g}$ sind, ist für alle $x \in \mathbb{T}^2$ die Länge der Kurve $c_x := c(\,.\,) + x$ gleich $\mathcal{L}_{\tilde{g}}(v)$, also

$$\int_{\mathbb{T}^2,\tilde{g}} dx \int_{S^1} dt\, |\dot{c}_x(t)|_{\tilde{g}} = \mathcal{L}_{\tilde{g}}(v)\, \text{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2,\tilde{g}} dx\, \text{Länge}_g(c_x) &= \int_{\mathbb{T}^2,\tilde{g}} dx \int_{S^1} dt\, |\dot{c}_x(t)|_g \\ &= \int_{\mathbb{T}^2,\tilde{g}} dx \int_{S^1} dt\, e^{u\circ c_x(t)}\, |\dot{c}_x(t)|_{\tilde{g}} \\ &= \mathcal{L}_{\tilde{g}}(v) \int_{\mathbb{T}^2,\tilde{g}} dx\, e^{u(x)} \\ &\leq \mathcal{L}_{\tilde{g}}(v)\, \text{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})^{1/2}\, \text{area}(\mathbb{T}^2, g)^{1/2} \end{aligned}$$

Es gibt also ein $x \in \mathbb{T}^2$, so daß

$$\frac{\text{Länge}_g(c_x)}{\text{area}(\mathbb{T}^2, g)^{1/2}} \leq \frac{\mathcal{L}_{\tilde{g}}(v)}{\text{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})^{1/2}}.$$

Und daraus folgt die Behauptung der Proposition. □

Die Proposition liefert nun bereits Abschätzungen unserer (spin-)konformen Invarianten nach oben. Als Korollar aus der Proposition ergibt sich deshalb unmittelbar:

KOROLLAR 3.7.3 (Li-Yau[LiY82]). *Für alle immersierten Tori $(\mathbb{T}^2, g)$ ist das Willmore-Funktional größer oder gleich*

$$\frac{2\pi^2}{\mathcal{V}(g)}.$$

Im Fall $\mathcal{V}(g) \leq 1$ gilt also die Willmore-Vermutung.

Eine Verallgemeinerung des Theorems von Loewner erzielte J. J. Hebda in [He91].

THEOREM 3.7.4 (Hebda). *Sei g eine beliebige Metrik auf $\mathbb{T}^2$ und $0 \leq l_i \leq \ell_i(g)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann gilt*

$$4\text{area}^2(\mathbb{T}^2, g) \geq 2\left(l_1^2 l_2^2 + l_1^2 l_3^2 + l_2^2 l_3^2\right) - \left(l_1^4 + l_2^4 + l_3^4\right)$$

und

$$\lambda_1(g) \leq \frac{16\pi^2}{2\,(l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_2 l_3) - (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)}.$$

In beiden Ungleichung gilt Gleichheit genau dann, wenn g flach ist und $l_i = \ell_i(g)$ für $i = 1, 2, 3$.

Wir werden eine Umkehrung des Theorems von Hebda mit einem zusätzlichen Krümmungsterm zeigen (Theorem 4.2.4).

Die Arbeit von Hebda [He91] enthält leider einen kleinen Fehler im Beweis eines Lemmas (Seite 102/103). Die Aussage des Lemmas bleibt jedoch dennoch richtig. Wir beweisen nun eine geringfügige Verallgemeinerung dieses Lemmas. Diese verallgemeinerte Version wird auch im Beweis von Theorem 4.2.4 benötigt.

LEMMA 3.7.5. *Sei $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3$, $0 \leq w_1 \leq w_2 \leq w_3$ und $v_i \leq w_i, i = 1, 2, 3$. Wir definieren $P(x, y, z) := 2\,(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2)$. Dann gilt*

$$P\,(v_1, v_2, v_3) \leq P\,(w_1, w_2, \min\{w_3, w_1 + w_2\})\,. \tag{3.7.1}$$

Haben wir zusätzlich $w_3 \leq w_1 + w_2$, dann gilt Gleichheit in (3.7.1) *genau dann, wenn $v_i = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.*

Bemerkung. Sind l_1, l_2 und l_3 die Seitenlängen eines Dreiecks in der Ebene und A der Flächeninhalt dieses Dreiecks, so gilt

$$P({l_1}^2, {l_2}^2, {l_3}^2) = 16\,A^2.$$

Diese Formel wurde früher Heron von Alexandrien (um 60 n. Chr.) zugeschrieben, stammt aber von Archimedes [Wa56, Seite 378, 455]. Das Lemma besagt also anschaulich: sind die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle_1$ länger als die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle_2$ und hat $\triangle_1$ keinen stumpfen Innenwinkel, so ist der Flächeninhalt von $\triangle_1$ größer als der von $\triangle_2$.

Beweis des Lemmas. Wir setzen $\tilde{v}_3 := \min\{v_3, v_1 + v_2\}$ und analog $\tilde{w}_3 := \min\{w_3, w_1 + w_2\}$.

$$\begin{aligned}
P(v_1, v_2, v_3) &\le P(v_1, v_2, \tilde{v}_3) \\
&\le P\Big(\min\{w_1, \tilde{v}_3\}, \min\{w_2, \tilde{v}_3\}, \tilde{v}_3\Big) \\
&\le P\Big(w_1, \min\Big\{w_2, \max\{w_1, \tilde{v}_3\}\Big\}, \max\{w_1, \tilde{v}_3\}\Big) \\
&\le P\Big(w_1, w_2, \max\{w_2, \tilde{v}_3\}\Big) \\
&\le P(w_1, w_2, \tilde{w}_3)
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Tatsache, daß die Funktion $z \mapsto P(x, y, z)$ ihr absolutes Maximum in $z = x + y$ annimmt.

Die zweite Ungleichung beruht darauf, daß $(\partial P/\partial x) = -2x + 2y + 2z \ge 0$ für $x \le z$ und $(\partial P/\partial y) = 2x - 2y + 2z \ge 0$ für $y \le z$.

Die dritte Ungleichung ist klar, falls $w_1 \le \tilde{v}_3$. Andernfalls gilt $\tilde{v}_3 < w_1 \le w_2$; die dritte Ungleichung folgt dann aus $(\partial P/\partial x) + (\partial P/\partial y) + (\partial P/\partial z) = 2(x + y + z) > 0$, denn alle drei Einträge in P werden um $w_1 - \tilde{v}_3$ vergrößert.

Die vierte Ungleichung ist klar, falls $w_2 \le \max\{w_1, \tilde{v}_3\}$; andernfalls folgt sie aus $(\partial P/\partial y) + (\partial P/\partial z) = 4x > 0$.

Für die fünfte Ungleichung unterscheide man zwei Fälle. Falls $w_3 \ge w_1 + w_2$ gilt, können wir wie bei der ersten Ungleichung schließen. Ansonsten ergibt sich $\tilde{w}_3 \in [\max\{w_2, \tilde{v}_3\}, w_1 + w_2]$. Auf diesem Intervall gilt aber $(\partial P/\partial z) \ge 0$. Somit folgt Ungleichung (3.7.1).

Gilt Gleichheit in (3.7.1), dann gilt Gleichheit in allen fünf obigen Ungleichungen. Aus der ersten schließen wir $\tilde{v}_3 = v_3$, aus der zweiten bis vierten folgt $w_1 = v_1$ und $w_2 = v_2$, und aus der fünften ergibt sich dann $\tilde{w}_3 = \max\{w_2, \tilde{v}_3\} = v_3$. Wir haben somit die Gleichheitsaussage gezeigt. $\square$

Für manche unserer Abschätzungen in den Abschnitten 4.3 und 4.2 gehen die Abschätzungen mit den Loewnerschen Methoden aber leider in die falsche Richtung. Im folgenden wollen wir deswegen Abschätzungen in die andere Richtung herleiten.

Aufgrund der Ergebnisse des letzten Abschnittes gilt:

$$\mathcal{V}(g) \le \mathcal{V}(\tilde{g})\, e^{2(\max u - \min u)}$$

und analoge Aussagen für die anderen Invarianten. Deswegen folgt gleich aus Theorem 3.5.1 bzw. seinem Korollar die

PROPOSITION 3.7.6. *Für alle Metriken g und alle nicht-trivialen Spin-Homomorphismen χ auf $\mathbb{T}^2$ gilt*

$$\begin{array}{rcccc}
\mathcal{V}(g) & \le & e^{2\mathcal{S}(\mathcal{K}_p,p,\mathcal{V}(\tilde{g}))}\,\mathcal{V}(\tilde{g}) & \le & e^{2\mathcal{S}(\mathcal{K}_p,p,\mathcal{V}(g))}\,\mathcal{V}(\tilde{g}) \\
\mathcal{W}(g) & \le & e^{2\mathcal{S}(\mathcal{K}_p,p,\mathcal{V}(\tilde{g}))}\,\mathcal{W}(\tilde{g}) & \le & e^{2\mathcal{S}(\mathcal{K}_p,p,\mathcal{V}(g))}\,\mathcal{W}(\tilde{g}) \\
\text{spin-}\mathcal{V}(g,\chi) & \le & e^{2\mathcal{S}(\mathcal{K}_p,p,\mathcal{V}(\tilde{g}))}\,\text{spin-}\mathcal{V}(\tilde{g},\chi) & \le & e^{2\mathcal{S}(\mathcal{K}_p,p,\mathcal{V}(g))}\,\text{spin-}\mathcal{V}(\tilde{g},\chi) \\
\text{spin-}\mathcal{W}(g,\chi) & \le & e^{2\mathcal{S}(\mathcal{K}_p,p,\mathcal{V}(\tilde{g}))}\,\text{spin-}\mathcal{W}(\tilde{g},\chi) & \le & e^{2\mathcal{S}(\mathcal{K}_p,p,\mathcal{V}(g))}\,\text{spin-}\mathcal{W}(\tilde{g},\chi)
\end{array}$$

mit

$$\mathcal{S}(\mathcal{K},p,\mathcal{V}) := \frac{1}{2}\left|\log\left(1-\frac{\mathcal{K}}{4\pi}\right)\right| + \frac{\mathcal{K}}{8\pi-2\mathcal{K}}\,q\log(2q) + \frac{q\mathcal{K}}{4\pi} + \frac{\mathcal{K}\mathcal{V}}{8}$$

und $q := p/(p-1)$.

Diese Abschätzung liefert genau dann Schranken, wenn $\mathcal{K}_1 < 4\pi$. Wir wollen jetzt eine andere Abschätzung zeigen. Unter anderem wird diese neue Abschätzung unabhängig von p und q sein. Die einzige Krümmungsgröße, die eingeht, ist die Totalkrümmung $\mathcal{K}_1$.

THEOREM 3.7.7. *Sei g eine Riemannsche Metrik auf dem Torus $\mathbb{T}^2$. Sei $\tilde{g}$ flach und konform äquivalent zu g. Wir nehmen an, daß für die Totalkrümmung $\mathcal{K}_1$ gilt $\mathcal{K}_1 := \int |K_g|\,\mathrm{dvol}_g < 4\pi$. Dann gilt für alle nicht-trivialen Spin-Homomorphismen χ und alle $t \in]0,1[$:*

$$\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right)\mathcal{V}(g) \le \mathcal{V}(\tilde{g})(1+t)^2\exp\left(\frac{\mathcal{K}_1\mathcal{V}(g)}{4t^2}\right) \tag{3.7.2}$$

$$\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right)\mathcal{V}(g) \le \mathcal{V}(\tilde{g})(1-t)^{-2}\exp\left(\frac{\mathcal{K}_1\mathcal{V}(\tilde{g})}{4t^2}\right) \tag{3.7.3}$$

$$\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right)\mathcal{W}(g) \le \mathcal{W}(\tilde{g})(1+t)^2\exp\left(\frac{\mathcal{K}_1\mathcal{V}(g)}{4t^2}\right) \tag{3.7.4}$$

$$\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right)\mathcal{W}(g) \le \mathcal{W}(\tilde{g})(1-t)^{-2}\exp\left(\frac{\mathcal{K}_1\mathcal{V}(\tilde{g})}{4t^2}\right) \tag{3.7.5}$$

$$\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right)\text{spin-}\mathcal{V}(g,\chi) \le \text{spin-}\mathcal{V}(\tilde{g},\chi)(1+t)^2\exp\left(\frac{\mathcal{K}_1\mathcal{V}(g)}{4t^2}\right) \tag{3.7.6}$$

$$\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right)\text{spin-}\mathcal{V}(g,\chi) \le \text{spin-}\mathcal{V}(\tilde g,\chi)(1-t)^{-2}\exp\left(\frac{\mathcal{K}_1\mathcal{V}(\tilde g)}{4t^2}\right) \tag{3.7.7}$$

$$\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right)\text{spin-}\mathcal{W}(g,\chi) \le \text{spin-}\mathcal{W}(\tilde g,\chi)(1+2t)^{2}\exp\left(\frac{\mathcal{K}_1\mathcal{V}(g)}{4t^2}\right) \tag{3.7.8}$$

$$\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right)\text{spin-}\mathcal{W}(g,\chi) \le \text{spin-}\mathcal{W}(\tilde g,\chi)(1-t)^{-2}\exp\left(\frac{\mathcal{K}_1\mathcal{V}(\tilde g)}{t^2}\right) \tag{3.7.9}$$

Ungleichung (3.7.2) dient dazu $\mathcal{V}(\tilde g)$ nach unten abzuschätzen, wohingegen Ungleichung (3.7.3) dazu dient, $\mathcal{V}(g)$ nach oben abzuschätzen. Analoges gilt natürlich für $\mathcal{W}$, spin-$\mathcal{V}$ und spin-$\mathcal{W}$.

Beweis von Theorem 3.7.7. Wir definieren v_1,v_2, $G(v)$ und $\widehat G(v)$ wie im Beweis von Theorem 3.5.1. Ferner seien $A(v) := \operatorname{area}(G(v), g)$, $\tilde A(v) := \operatorname{area}(G(v), \tilde g)$, $l(v) := \text{Länge}_g(\partial \widehat G(v))$ und $\tilde l(v) := \text{Länge}_{\tilde g}(\partial \widehat G(v))$. Sei $\mathcal{K}_1 := \mathcal{K}_1(\mathbb{T}^2, g)$. Nun definieren wir für $t \in]0,1[$:

$$\tilde v_{1,t} := \sup\Big\{v \in]-\infty, v_1] \text{ reg. Wert von } u \;\Big|\; \tilde l(v) < 2t\,\text{sys}_1\big(\mathbb{T}^2,\tilde g\big)\Big\}$$
$$v_{1,t} := \sup\Big\{v \in]-\infty, v_1] \text{ reg. Wert von } u \;\Big|\; l(v) < 2t\,\text{sys}_1\big(\mathbb{T}^2, g\big)\Big\}$$

Nach eventueller, geringfügiger Änderung von t können wir annehmen, daß $v_{1,t}$ und $\tilde v_{1,t}$ reguläre Werte von u sind.

Nun gilt nach Satz 3.5.9

$$(v_2 - \tilde v_{1,t}) \le \frac{\mathcal{K}_1\,\mathcal{V}(\tilde g)}{8t^2} \tag{3.7.10}$$

$$(v_2 - v_{1,t}) \le \frac{\mathcal{K}_1\,\mathcal{V}(g)}{8t^2} \tag{3.7.11}$$

Wir benutzen nun Satz 3.6.1 für $G = G(v_2)$. Den Integralterm schätzen wir ab

$$\left|\int_0^{A(v_2)}\big(A(v_2)-a\big)\,K_*(a)\,da\right| \le A(v_2)\sup_{0\le \hat A\le A(v_2)}\left|\int_0^{\hat A} K_*(a)\,da\right|$$
$$\left|\int_0^{\hat A} K_*(a)\,da\right| \le \frac{\mathcal{K}_1}{2}$$

und erhalten

$$e^{2v_2}\tilde A(v_2) \ge A(v_2)\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right).$$

Daraus folgt

$$e^{2v_2}\operatorname{area}(\mathbb{T}^2,\tilde g) \ge \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g)\left(1-\frac{\mathcal{K}_1}{4\pi}\right), \tag{3.7.12}$$

Wir nutzen nun Proposition 3.2.6, um die Systolen abzuschätzen. Hierzu nehmen wir ein $w \in [v_{1,t}, v_1[$ für das $l(w) = 2t\,\mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g)$. Wir können annehmen, daß w ein regulärer Wert ist. Sei $A := \widehat{G}_w$. Aufgrund der Wahl von w besteht das Bild von $\pi_1(\overline{A}) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ nur aus dem Einselement. Die offene Menge A erfüllt somit die Voraussetzungen von Proposition 3.2.6.

Wir haben also

$$\begin{array}{rlclcl}
 & e^{v_{1,t}} & \mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) & \leq & (1+t) & \mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g) \\
 & e^{v_{1,t}} & \ell_2(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) & \leq & (1+t) & \ell_2(\mathbb{T}^2, g) \\
 & e^{v_{1,t}} & \text{spin-sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g}, \chi) & \leq & (1+t) & \text{spin-sys}_1(\mathbb{T}^2, g, \chi) \\
 & e^{v_{1,t}} & \text{spin-}\ell_2(\mathbb{T}^2, \tilde{g}, \chi) & \leq & (1+2t) & \text{spin-}\ell_2(\mathbb{T}^2, g, \chi) \\
(1-t) & e^{\tilde{v}_{1,t}} & \mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) & \leq & & \mathrm{sys}_1(\mathbb{T}^2, g) \\
(1-t) & e^{\tilde{v}_{1,t}} & \ell_2(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) & \leq & & \ell_2(\mathbb{T}^2, g) \\
(1-t) & e^{\tilde{v}_{1,t}} & \text{spin-sys}_1(\mathbb{T}^2, \tilde{g}, \chi) & \leq & & \text{spin-sys}_1(\mathbb{T}^2, g, \chi) \\
(1-2t) & e^{\tilde{v}_{1,t}} & \text{spin-}\ell_2(\mathbb{T}^2, \tilde{g}, \chi) & \leq & & \text{spin-}\ell_2(\mathbb{T}^2, g, \chi).
\end{array}$$

Zusammen mit den Ungleichungen (3.7.11) und (3.7.12) folgen die zu beweisenden Ungleichungen. Man beachte, daß die Werte des Parameters t in Ungleichung (3.7.9) um den Faktor 2 reskaliert wurden. $\square$

Kapitel 4

Anwendungen auf das Spektrum von 2-Tori

4.1 Spektrum flacher 2-Tori

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst einige seit langem bekannten Tatsachen über das Spektrum der flachen 2-Tori zusammenfassen und dann mit einigen Invarianten dieser Arbeit in Verbindung bringen.

Da es klar ist, wie sich das Spektrum unter Reskalierung verhält, beschränken wir uns auf den Fall, daß

$$\mathbb{T}^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}}$$

die Metrik $\tilde{g}$ trägt, die von der Standardmetrik g_{eukl} von $\mathbb{R}^2$ induziert wird.

Hierbei ist (x, y) ein Element des Modulraums $\mathcal{M}$ oder (bei Dirac-Operatoren und nicht-trivialer Spin-Struktur) ein Element des Modulraums spin-$\mathcal{M}$ aus Lemma 3.3.1 bzw. 3.3.2.

Das duale Gitter $\Gamma^* = H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ wird von den Vektoren

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix}1\\-x/y\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_2 := \begin{pmatrix}0\\1/y\end{pmatrix}$$

erzeugt. Die Funktion

$$f_\gamma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C} \quad f_\gamma(x) := \exp\Big(2\pi i \langle\gamma, x\rangle\Big) \quad \gamma \in \Gamma^*$$

ist eine Eigenfunktion des Laplace-Operators Δ auf komplexwertigen Funktionen zum Eigenwert $4\pi^2|\gamma|^2$, wobei $|\,.\,|$ die Standard-Norm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Und die Familie $(f_\gamma | \gamma \in \Gamma^*)$ ist ein vollständiges System von Eigenfunktionen.

Ähnlich ist die Situation für das Quadrat des Dirac-Operators, wenn die Spin-Struktur trivial ist. Seien ψ_1 und ψ_2 parallele orthonormale Spinoren auf $\mathbb{T}^2$, dann bilden $(f_\gamma \psi_j | j = 1, 2; \gamma \in \Gamma^*)$ ein vollständiges System von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $4\pi^2|\gamma|^2$.

Im Rest dieses Abschnitts trage der Torus die nicht-triviale Spin-Struktur, die durch den Spin-Homomorphismus χ mit

$$\chi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \chi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -1$$

beschrieben wird. Die 1-Form

$$\omega := \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \in \frac{1}{2}\Gamma^*$$

ist eine Realisierung als Differentialform (siehe Lemma-Definition 2.4.1). Seien ψ_1 und ψ_2 eine Basis der parallelen Schnitte auf $\mathbb{R}^2$ und punktweise orthogonal. Dann definiert

$$\Psi_{j,\gamma} := \exp\Big(2\pi i \langle \gamma, x\rangle\Big)\, \psi_j \quad \gamma \in \Gamma^* + \omega$$

einen Eigenspinor von $D^2 : \Sigma\mathbb{T}^2 \to \Sigma\mathbb{T}^2$ zum Eigenwert $4\pi^2|\gamma|^2$ und die Familie $(\Psi_{j,\gamma} | j = 1, 2; \gamma \in \Gamma^* + \omega)$ ist ein vollständiges System von Eigenspinoren.

Um nun konkret den kleinsten Eigenwert des Dirac-Operators bei nicht-trivialer Spin-Struktur angeben zu können, brauchen wir noch einen Hilfssatz. Wenn $(x, y) \in$ spin-$\mathcal{M}$, so sieht man leicht, daß γ_1 und γ_2 die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllen.

HILFSSATZ 4.1.1. *Die linear unabhängigen Vektoren $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^2$ sollen die Bedingung*

$$0 \le -\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle \le |\gamma_2|^2 \le |\gamma_1|^2$$

erfüllen. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$|a\gamma_1 + b\gamma_2| \ge |\gamma_1 + \gamma_2|.$$

Aus der Gleichheit folgt $|a| = |b| = 1$.

Beweis. Sei $|a\gamma_1 + b\gamma_2| \le |\gamma_1 + \gamma_2|$. O.B.d.A. sind a und b teilerfremd. Dann erhalten wir

$$a^2|\gamma_1|^2 - 2\,|ab| \cdot |\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle| + b^2|\gamma_2|^2 \le |\gamma_1|^2 - 2\,|\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle| + |\gamma_2|^2$$

und somit

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 - 2)\,|\gamma_2|^2 &\le (a^2 - 1)\,|\gamma_1|^2 + (b^2 - 1)\,|\gamma_2|^2 \\ &\le 2(|ab| - 1)\,|\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle| \le 2(|ab| - 1)\,|\gamma_2|^2.\end{aligned}$$

Also gilt $(|a| - |b|)^2 \le 0$, d. h. $|a| = |b|$, und da a und b als teilerfremd angenommen wurden, erhalten wir $|a| = |b| = 1$. Weil außerdem $|\gamma_1 - \gamma_2| \ge |\gamma_1 + \gamma_2|$ gilt, folgt der Hilfssatz. $\square$

Wir erhalten also für den kleinsten Eigenwert λ von D^2

$$\lambda = 4\pi^2|\omega|^2 = \pi^2 \left[1 + \left(\frac{1-x}{y}\right)^2\right] > 1 \tag{4.1.1}$$

In Termen von spin-$\mathcal{V}$:= spin-$\mathcal{V}(\tilde{g},\chi)\hat{=}y$ und spin-$\mathcal{W}$:= spin-$\mathcal{W}(\tilde{g},\chi)\hat{=}y/(x^2+y^2)$, bzw. in Termen von area := area$(\mathbb{T}^2,\tilde{g})\hat{=}y$, spin-sys$_1$:= spin-sys$_1(\tilde{g},\chi)\hat{=}1$ und spin-ℓ_2 := spin-$\ell_2(\tilde{g},\chi)\hat{=}\sqrt{x^2+y^2}$ erhalten wir:

LEMMA 4.1.2. *Sei $\tilde{g}$ eine flache Metrik auf $\mathbb{T}^2$ und χ eine nicht-triviale Spin-Struktur. Dann gilt für den kleinsten Eigenwert λ von D^2*

$$\begin{aligned}
\lambda\,\text{area} &= \pi^2\left\{\frac{1}{\text{spin-}\mathcal{V}} + \frac{1}{\text{spin-}\mathcal{W}} - 2\sqrt{\frac{1}{\text{spin-}\mathcal{V}\ \text{spin-}\mathcal{W}} - 1}\right\}\\
\lambda\,\text{area}^2 &= \pi^2\left\{\text{spin-sys}_1{}^2 + \text{spin-}\ell_2{}^2 - 2\sqrt{\text{spin-sys}_1{}^2\text{spin-}\ell_2{}^2 - \text{area}^2}\right\}\\
\lambda &\geq \left(\frac{\pi}{\text{spin-sys}_1}\right)^2
\end{aligned}$$

4.2 Spektrum des Laplace-Operators

In diesem Abschnitt wollen wir die Ergebnisse der Abschnitte 3.5 und 3.7 anwenden, um eine Abschätzung der Eigenwerte des Laplace-Operators Δ auf dem 2-Torus herzuleiten. Wir werden die Sätze dieses Abschnitts nur für den Laplace-Operator auf Funktionen formulieren.

Da wir aber dann das Spektrum des Laplace-Operators auf Funktionen abschätzen können, haben wir auch Kontrolle über das Spektrum auf 2-Formen: Der Hodge-$*$-Operator ist ein Isomorphismus von den Funktionen auf die 2-Formen, der mit dem Laplace-Operator kommutiert. Also ist das Spektrum auf den 2-Formen gleich dem Spektrum auf den Funktionen.

Auch das äußere Differential d und sein Adjungiertes d^* kommutieren mit dem Laplace-Operator und sind Isomorphismen vom orthogonalen Komplement ihres Kerns auf ihr Bild. Abgesehen vom Eigenwert 0 ist also das Spektrum des Laplace-Operators auf 1-Formen gleich dem Spektrum auf Funktionen, wobei die Multiplizitäten auf den 1-Formen doppelt so groß wie die Multiplizitäten auf den Funktionen sind. Somit gelten die Abschätzungen dieses Abschnitts entsprechend auch auf 1- und 2-Formen.

Der 2-Torus $\mathbb{T}^2$ trage wieder eine Riemannsche Metrik $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit $\tilde{g}$ flach. Es gilt nach [Be87, 1.159]

$$\Delta_g = e^{-2u}\Delta_{\tilde{g}}.$$

Aus dieser Formel erhalten wir den

HILFSSATZ 4.2.1. *Sei M eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit zwei konformen Metriken $g = e^{2u}\tilde{g}$ und $\tilde{g}$. Die Eigenwerte des Laplace-Operators von g bzw. $\tilde{g}$ auf Funktionen seien $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots$ bzw. $0 = \tilde{\lambda}_0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \dots$. Dann gilt*

$$\lambda_i \min_{m\in M} e^{2u} \leq \widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_i \max_{m\in M} e^{2u} \qquad \forall i = 1, 2, \dots .$$

Beweis. Seien $f_0, \dots, f_i$ Eigenfunktionen von Δ_g zu den Eigenwerten $\lambda_0, \dots, \lambda_i$. Sei U_i der von $f_0, \dots, f_i$ erzeugte Unterraum von $V := C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Wir schätzen nun $\widetilde{\lambda}_i$ durch den Rayleigh-Quotienten ab:

$$\widetilde{\lambda}_i \leq \max_{f\in U_i - \{0\}} \frac{(\Delta_{\tilde{g}} f, f)_{\tilde{g}}}{(f, f)_{\tilde{g}}}.$$

Wir bekommen für Zähler und Nenner:

$$\begin{aligned}(\Delta_{\tilde{g}} f, f)_{\tilde{g}} &= \int (\Delta_{\tilde{g}} f)\bar{f} \,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} = \int (\Delta_g f)\bar{f} \,\mathrm{dvol}_g \\ &= (\Delta_g f, f)_g \leq \lambda_i (f, f)_g\end{aligned}$$

$$(f, f)_{\tilde{g}} = \int f\bar{f} \,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} = \int f\bar{f}\, e^{-2u} \,\mathrm{dvol}_g \geq e^{-2\max u} (f, f)_g.$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_i \, e^{2\max u}.$$

Die andere Ungleichung des Hilfssatzes geht völlig analog. □

Da wir nun u in Termen von $\mathcal{K}_p(\mathbb{T}^2, g)$, p und $\mathcal{V}$ abschätzen können, bekommen wir das folgende Theorem. Für den Rest der Arbeit definieren wir die Funktion $\mathcal{Q} : [0, 4\pi[\times]1, \infty] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ durch

$$\mathcal{Q} := \exp(2\mathcal{S})$$

mit der in Theorem 3.5.1 definierten Funktion $\mathcal{S}$, also

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\mathcal{K}, p, \mathcal{V}) := \exp \Bigg[\Big|\log\Big(1 - \frac{\mathcal{K}}{4\pi}\Big)\Big| &+ \frac{\mathcal{K}}{4\pi - \mathcal{K}}\, q \log(2q) \\ &+ \frac{q\mathcal{K}}{2\pi} + \frac{\mathcal{K}\mathcal{V}}{4} \Bigg]\end{aligned}$$

mit $q := p/(p-1)$.

THEOREM 4.2.2. *Sei $g = e^{2u}\tilde{g}$ eine Metrik auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2$ mit $\tilde{g}$ flach und $\int |K_g| \mathrm{dvol}_g < 4\pi$. Die Eigenwerte λ_i und $\tilde{\lambda}_i$ des Laplace-Operators von g bzw. $\tilde{g}$ erfüllen*

$$\mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right)^{-1} \tilde{\lambda}_i \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) \leq \lambda_i \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g) \leq \mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right) \tilde{\lambda}_i \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}).$$

Hierbei ist p so klein gewählt, daß

$$\mathcal{K}_p := \|K_g\|_{L^p(\mathbb{T}^2),g} \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g)^{1-\frac{1}{p}} < 4\pi.$$

Die analoge Aussage gilt in der Variante mit $\mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(\tilde{g})\right)$.

Beweis. Es gilt natürlich

$$e^{2\min u} \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) \leq \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g) \leq e^{2\max u} \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}).$$

Deswegen folgt dieses Theorem aus Theorem 3.5.1 und dem vorangestellten Hilfssatz. □

KOROLLAR 4.2.3. *Jede Metrik $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit $\tilde{g}$ flach auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2$ erfüllt*

$$\frac{4\pi^2}{\mathcal{V}(g)} \mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right)^{-1} \leq \lambda_1 \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g) \leq \frac{4\pi^2}{\mathcal{V}(g)} \mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right)^2.$$

sofern $\int |K_g| \mathrm{dvol}_g < 4\pi$. Hierbei ist p so klein gewählt, daß $\mathcal{K}_p < 4\pi$.

Beweis. Wir nutzen zum einen die elementare Tatsache für flache 2-Tori

$$\tilde{\lambda}_1 \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) = \frac{4\pi^2}{\mathcal{V}(\tilde{g})}.$$

Zum andern liefern die Propositionen 3.7.2 und 3.7.6

$$\mathcal{V}(\tilde{g}) \leq \mathcal{V}(g) \leq \mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right) \mathcal{V}(\tilde{g}).$$

Dann ergibt sich mit dem obigen Theorem die Behauptung des Korollars. □

Wir können auch ein Gegenstück zum Satz von Hebda (Satz 3.7.4) zeigen:

THEOREM 4.2.4. *Sei $P(x, y, z) := 2\,(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2)$. Jede Metrik g auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2$ mit $\int |K_g| \mathrm{dvol}_g < 4\pi$ erfüllt*

$$4 \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, g)^2 \leq P\left({\ell_1}^2, {\ell_2}^2, \min\{{\ell_3}^2, {\ell_1}^2 + {\ell_2}^2\}\right) \mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right)^2$$

und

$$\lambda_1(g)\ \mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right) \geq \frac{16\pi^2}{P(\ell_1, \ell_2, \ell_3)},$$

wobei wir $\ell_i := \ell_i(g)$ setzen und $\lambda_1(g)$ der erste von Null verschiedene Eigenwert von Δ_g ist.

Beweis. Wir schreiben wieder $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit $\tilde{g}$ flach.

Für den flachen Torus $(\mathbb{T}^2, \tilde{g})$ gilt nach der Heronischen Ungleichung oder nach Theorem 3.7.4

$$4\,\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g})^2 = P(\ell_1(\tilde{g})^2, \ell_2(\tilde{g})^2, \ell_3(\tilde{g})^2).$$

Wir schätzen nun die Größen bezüglich der flachen Metrik $\tilde{g}$ wie oben gegen die Größen bezüglich der beliebigen Metrik g ab. Es gilt

$$\ell_i(g) \geq \exp(\min u)\,\ell_i(\tilde{g})$$
$$\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g) \leq \exp(2\max u)\,\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}).$$

Die Schranke $\mathcal{Q}$ wählen wir wieder wie oben. Wir nutzen Lemma 3.7.5, das uns die Monotonie garantiert, und die Homogenität von P. Wir erhalten die Abschätzung von area(g) nach oben.

Der Beweis der Abschätzung von $\lambda_1(g)$ geht ähnlich. Der Satz von Hebda besagt für den flachen Torus $(\mathbb{T}^2, \tilde{g})$

$$\lambda_1(\tilde{g}) = \frac{16\pi^2}{P(\ell_1(\tilde{g}), \ell_2(\tilde{g}), \ell_3(\tilde{g}))}.$$

Aus Hilfssatz 4.2.1 bekommen wir

$$\lambda_1(g)\exp(2\max u) \geq \lambda_1(\tilde{g}).$$

Da $\ell_3(g) \leq \ell_1(g) + \ell_2(g)$ gilt, folgt hieraus analog zu oben die untere Abschätzung von $\lambda_1(g)$. $\square$

Beispiel. Um die Notwendigkeit der Bedingung $\mathcal{K}_1 < 4\pi$ zu diskutieren, betrachten wir wiederum die Pinocchio-Metriken $g_{R,H,0}$. Mit Hilfe einer Testfunktion, die längs der „Nase“ von 0 auf 1 wächst, sehen wir, daß für den kleinsten von Null verschiedenen Eigenwert λ_1 des Laplace-Operators gilt

$$\lambda_1(g_{R,H,0}) \leq \mathrm{konst}\,H^{-2}.$$

Wir wählen wiederum $R = R(H)$ so, daß

$$\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g_{R,H,0}) = \mathrm{konst}.$$

Hierfür konvergiert $\lambda_1\,\mathrm{area} \to 0$ für $H \to \infty$.

Es ist deswegen nicht möglich, eine untere Schranke an $\lambda_1\,\mathrm{area}$ in Termen von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{V}(g)$ zu finden, wenn $\mathcal{K}_1 \geq 4\pi$ gilt. Analoges bekommen wir für $\mathcal{V}(\tilde{g}) = \widetilde{\mathcal{V}}(g)$ anstelle von $\mathcal{V}(g)$.

Offen bleiben jedoch die folgenden Fragen:

Frage: Gibt es eine untere Schranke an $\lambda_1(g)\,\mathrm{area}(g)$ in Termen von $\mathcal{K}_p(g)$ $(p > 1)$ und $\mathcal{V}(g)$ oder $\widetilde{\mathcal{V}}(g)$, die auch für $\mathcal{K}_1(g) \geq 4\pi$ gilt?

Frage: Gibt es eine untere Schranke an $\lambda_1(g)\,\mathrm{area}(g)$ in Termen von $\mathcal{K}_1(g)$ und $\mathcal{V}(g)$ oder $\widetilde{\mathcal{V}}(g)$, falls $\mathcal{K}_1(g) < 4\pi$?

4.3 Spektrum des Dirac-Operators

In diesem Abschnitt wollen wir das Spektrum des Dirac-Operators D auf konform äquivalenten Mannigfaltigkeiten vergleichen. Als Korollar erhalten wir eine Abschätzung des kleinsten Eigenwerts von D^2 auf 2-Tori mit nicht-trivialer Spin-Struktur.

Dieses M trage also zwei Riemannsche Metriken $\tilde{g}$ und $g = e^{2u}\tilde{g}$. Multiplikation mit e^u liefert eine natürliche Identifikation $\widetilde{P_{\mathrm{SO}}}(M) = P_{\mathrm{SO}}(M)$. Mittels dieser Identifikation wollen wir fordern, daß (M, g) und $(M, \tilde{g})$ eine gemeinsame Spin-Struktur $\varphi : \widetilde{P_{\mathrm{Spin}}}(M) = P_{\mathrm{Spin}}(M) \to \widetilde{P_{\mathrm{SO}}}(M) = P_{\mathrm{SO}}(M)$ haben.

SATZ 4.3.1. *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit zwei konformen Metriken $\tilde{g}$ und $g = e^{2u}\tilde{g}$. Seien D und $\widetilde{D}$ die zugehörigen Dirac-Operatoren bezüglich einer gemeinsamen Spin-Struktur φ. Bezeichnen wir die Eigenwerte von D^2 mit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ und die von $\widetilde{D}^2$ mit $\widetilde{\lambda}_1 \leq \widetilde{\lambda}_2 \leq \ldots$, so gilt*

$$\lambda_i \min_{m\in M} e^{2u} \leq \widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_i \max_{m\in M} e^{2u} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots$$

Beweis. Sei $n := \dim M$. Es gilt dann

$$\mathrm{dvol}_g = e^{nu}\mathrm{dvol}_{\tilde{g}}.$$

Mit [Hit74], [Bau81, Satz 3.14] oder [Hij86, 4.3.1] sieht man, daß es einen Vektorbündelisomorphismus

$$\begin{aligned} \Sigma M &\to \widetilde{\Sigma} M \\ \Psi &\mapsto \widetilde{\Psi} \end{aligned}$$

gibt, für den

$$\widetilde{D}(\widetilde{\Psi}) = e^u \widetilde{D\Psi}$$

und

$$|\widetilde{\Psi}| = e^{\frac{n-1}{2}u}|\Psi|$$

gilt.

Sei nun $(\Psi_i \,|\, i = 1, 2, \ldots)$ eine Orthonormal-Basis der Schnitte von ΣM bestehend aus Eigenspinoren Ψ_i von D^2 zum Eigenwert λ_i. Den von $\Psi_1, \ldots, \Psi_i$ aufgespannten Untervektorraum bezeichnen wir mit U_i.

Wir können nun $\widetilde{\lambda}_i$ durch den Rayleigh-Quotienten abschätzen:

$$\widetilde{\lambda}_i \leq \max_{\widetilde{\Psi} \in U_i - \{0\}} \frac{(\widetilde{D}\widetilde{\Psi}, \widetilde{D}\widetilde{\Psi})_{M,\tilde{g}}}{(\widetilde{\Psi}, \widetilde{\Psi})_{M,\tilde{g}}}.$$

Wir betrachten Zähler und Nenner:

$$\begin{aligned}
(\widetilde{D}\widetilde{\Psi}, \widetilde{D}\widetilde{\Psi})_{M,\tilde{g}} &= \int e^{2u} \langle \widetilde{D\Psi}, \widetilde{D\Psi} \rangle \,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} \\
&= \int e^{2u+(n-1)u} \langle D\Psi, D\Psi \rangle \,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} \\
&= \int e^{u} \langle D\Psi, D\Psi \rangle \,\mathrm{dvol}_{g} \\
&\leq (D\Psi, D\Psi)_{M,g} \max_{m \in M} e^u \\
&\leq \lambda_i \, (\Psi, \Psi)_{M,g} \max_{m \in M} e^u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\Psi}, \widetilde{\Psi})_{M,\tilde{g}} &= \int \langle \widetilde{\Psi}, \widetilde{\Psi} \rangle \,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} \\
&= \int e^{-u} \, \langle \Psi, \Psi \rangle \,\mathrm{dvol}_{g} \\
&\geq e^{-\max u} (\Psi, \Psi)_{M,g}
\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_i \max_{m \in M} e^{2u},$$

also die gewünschte Abschätzung von $\widetilde{\lambda}_i$ nach oben. Die Abschätzung nach unten folgt analog, indem wir g und $\tilde{g}$ vertauschen und u durch $-u$ ersetzen. □

Zusammen mit der Spektralabschätzung für flache 2-Tori erhalten wir eine Abschätzung für beliebige 2-Tori. Die Schranke $\mathcal{Q}$ ist wieder wie im vorigen Abschnitt definiert.

THEOREM 4.3.2. *Jede Metrik $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit $\tilde{g}$ flach auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2$ erfüllt*

$$\mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right)^{-1} \widetilde{\lambda}_i \mathrm{area}(\mathbb{T}^2 \tilde{g}) \leq \lambda_i \mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g) \leq \mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g)\right) \widetilde{\lambda}_i \mathrm{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}),$$

sofern $\int |K_g| \,\mathrm{dvol}_g < 4\pi$. Hierbei ist p so klein gewählt, daß

$$\mathcal{K}_p := \|K_g\|_{L^p(\mathbb{T}^2),g} \,\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g)^{1-\frac{1}{p}} < 4\pi,$$

und die λ_i und $\widetilde{\lambda}_i$ sind wie oben die Eigenwerte des Quadrates des Dirac-Operators bezüglich g und $\tilde{g}$ zu einem gemeinsamen Spin-Homomorphismus.

Die analoge Aussage gilt in der Variante mit $\mathcal{Q}\left(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(\tilde{g})\right)$.

Beweis. Der Beweis beruht auf Satz 4.3.1 und Theorem 3.5.1. □

KOROLLAR 4.3.3. *Sei g eine beliebige Metrik auf $\mathbb{T}^2$ mit $\int |K_g| < 4\pi$ und χ ein nicht-trivialer Spin-Homomorphismus. Alle Größen in diesem Satz beziehen sich auf g und χ. Es gilt für den kleinsten Eigenwert λ von D^2:*

$$\begin{aligned}
\lambda\,\mathrm{area} &\geq \pi^2 \left\{ \frac{1}{\mathcal{Q}\,\text{spin-}\mathcal{V}} + \frac{1}{\mathcal{Q}\,\text{spin-}\mathcal{W}} - 2\sqrt{\frac{1}{\text{spin-}\mathcal{V}\;\text{spin-}\mathcal{W}} - \frac{1}{\mathcal{Q}^2}} \right\},\\
\lambda\,\mathrm{area} &\leq \pi^2 \left\{ \frac{\mathcal{Q}^2}{\text{spin-}\mathcal{V}} + \frac{\mathcal{Q}^2}{\text{spin-}\mathcal{W}} - 2\mathcal{Q}\sqrt{\frac{1}{\text{spin-}\mathcal{V}\;\text{spin-}\mathcal{W}} - 1} \right\},\\
\lambda\,\mathrm{area}^2 &\geq \pi^2 \left\{ \frac{{\text{spin-sys}_1}^2}{\mathcal{Q}} + \frac{{\text{spin-}\ell_2}^2}{\mathcal{Q}} - 2\sqrt{{\text{spin-sys}_1}^2{\text{spin-}\ell_2}^2 - \frac{\mathrm{area}^2}{\mathcal{Q}^2}} \right\},\\
\lambda\,\mathrm{area}^2 &\leq \pi^2 \left\{ \mathcal{Q}^2\,{\text{spin-sys}_1}^2 + \mathcal{Q}^2\,{\text{spin-}\ell_2}^2 - 2\mathcal{Q}\sqrt{{\text{spin-sys}_1}^2{\text{spin-}\ell_2}^2 - \mathrm{area}^2} \right\},\\
\lambda &\geq \frac{\pi^2}{\mathcal{Q}\,{\text{spin-sys}_1}^2},
\end{aligned}$$

wobei wir sowohl $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(g))$ als auch $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(\tilde{g}))$ setzen können. Ferner ist $p > 1$ wieder so gewählt, daß $\mathcal{K}_p < 4\pi$. Die Ungleichungen mit Wurzel gelten natürlich nur, wenn die Wurzel existiert.

Beweis. Die ersten vier Ungleichungen folgen aus den Propositionen 3.7.2 und 3.7.6 sowie Lemma 4.1.2 und dem obigen Theorem. Die letzte Ungleichung folgt aus Theorem 3.5.1, Lemma 4.1.2 und Satz 4.3.1. □

Wir wollen nun eine Abschätzung in Termen der L^2-Spin-Struktur-Metrik aus Abschnitt 2.4 herleiten.

THEOREM 4.3.4. *Sei wieder g eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{T}^2$ mit $\int |K_g| < 4\pi$, χ ein Spin-Homomorphismus und $\mathcal{Q}$ wie oben. Dann gilt für den kleinsten Eigenwert λ_1 vom Quadrat des Dirac-Operators*

$$\mathcal{Q}^{-1}\, 4\pi^2 {d_2^{\mathrm{Spin}}(\chi, 0)}^2 \leq \lambda_1 \mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g) \leq \mathcal{Q}\, 4\pi^2 {d_2^{\mathrm{Spin}}(\chi, 0)}^2.$$

Beweis. Die L^2-Norm auf 1-Formen ist invariant unter konformer Änderung der Metrik, denn sind α_1 und α_2 zwei 1-Formen, so ist $(\alpha_1, \alpha_2)_{L^2} = \int \alpha_1 \wedge *\alpha_2$. Somit ist auch die L^2-Spin-Struktur-Metrik invariant unter konformer Änderung der Metrik. Sei ω eine Realisierung von χ als Differentialform mit minimaler L^2-Norm, dann ist ω harmonisch bezüglich jeder zu g konform äquivalenten Metrik. Sei also

$$\|\omega\|_{L^2(\mathbb{T}^2, \tilde{g})} = \|\omega\|_{L^2(\mathbb{T}^2, g)} = d_2^{\mathrm{Spin}}(\chi, 0)$$

für die flache Metrik $\tilde{g}$. Dann ist nach Gleichung (4.1.1)

$$\tilde{\lambda}_1 \mathrm{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) = 4\pi^2 d_2^{\mathrm{Spin}}(\chi, 0)^2.$$

Mit Theorem 4.3.2 folgt die Aussage. $\square$

Alle bisherigen Abschätzungen des Dirac- und Laplace-Spektrums benötigten die Generalvoraussetzung $\mathcal{K}_1 < 4\pi$. Das folgende Problem wurde deswegen noch nicht gelöst.

Offenes Problem. Sei g eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{T}^2$ und $\chi : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{Z}_2$ ein nicht-trivialer Spin-Homomorphismus. Finde eine Konstante $C = C([g, \chi]) > 0$, so daß für alle zu $(\mathbb{T}^2, g, \chi)$ spin-konform äquivalenten Tori gilt: der kleinste Eigenwert λ_1 von D^2 erfüllt

$$\lambda_1 \, \mathrm{area} \geq C.$$

Lott zeigte in [Lo86], daß eine derartige untere Schranke existieren muß, ihre explizite Gestalt ist jedoch nicht bekannt. Wir werden dieses Problem in Abschnitt 5.5 weiter diskutieren.

Kapitel 5

Abschätzungen des Willmore-Integrals

5.1 Das Willmore-Integral

Sei $F : N \to M$ eine Immersion einer geschlossenen Fläche N in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g). Der mittlere Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ ist ein Schnitt des Normalenbündels $\mathbf{N}N \to N$. Die Schnittkrümmung von M in der Ebene $F_* T_p N$ bezeichnen wir mit $K_M(p)$. Dann definieren wir das Willmore-Funktional

$$W(F) := \int_{\mathbb{T}^2} \left(K_M + |\mathbf{H} \circ F|^2 \right) \, \mathrm{dvol}_{F^* g}.$$

Weiner hat gezeigt

Theorem 5.1.1 ([We78, Theorem 1.1]). *Das Willmore-Funktional W ist invariant unter konformen Änderungen der Metrik g von M.*

Hingegen ist W nicht unabhängig unter beliebigen Änderungen der Metrik g. Ist z. B. F eine Einbettung oder hat F nur transversale Selbstschnitte, so kann g in einer Umgebung von $F(N)$ so abgeändert werden, daß $F(N)$ totalgeodätisch ist und K_M auf der Fläche verschwindet, d. h. bezüglich dieser abgeänderten Metrik gilt $W(F) = 0$.

Wir wollen uns im folgenden auf die beiden Fälle $M = S^n$ und $M = \mathbb{R}^n$ beschränken, wobei $\mathbb{R}^n$ die Standardmetrik g_{eukl} und S^n die von $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\mathrm{eukl}})$ induzierte Standardmetrik trage. Natürlich gelten die folgenden Aussagen auch dann noch, wenn M konform äquivalent zu einer offenen Teilmenge von S^n bzw. $\mathbb{R}^n$ ist.

SATZ 5.1.2. *Ist $F : N \to S^n$ eine Immersion einer geschlossenen Fläche und gibt es ein $p \in S^n$, so daß $F^{-1}(p)$ aus k verschiedenen Punkten besteht, dann gilt*

$$W(F) \geq 4k\pi.$$

Dieser Satz wurde zunächst von Willmore [Wi59, Seite 128] für den Fall $k = 1$ und $n = 3$ gezeigt und später von Li und Yau [LiY82, Theorem 6] in der obigen, allgemeineren Version bewiesen.

Der Satz ist „optimal", wenn N homöomorph zu S^2 ist, denn die Standard-Einbettung $F : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^n$ hat das Willmore-Integral 4π. Ist jedoch N eine orientierte Fläche von positivem Geschlecht, so hat Leon Simon gezeigt, daß die Abschätzung verbessert werden kann:

SATZ 5.1.3 ([Si93]). *Sei N eine geschlossene orientierte Fläche von Geschlecht $G \geq 1$. Dann ist*

$$\beta(G, n) := \inf W(F) > 4\pi,$$

wobei das Infimum alle Einbettungen $F : N \to S^n$ mit festem $n \geq 3$ durchläuft.

Außerdem gibt es eine Einbettung $F_n : \mathbb{T}^2 \to S^n$ mit

$$\beta(1, n) = W(F_n).$$

Die Tatsache, daß hier nur Einbettungen und keine beliebigen Immersionen zugelassen werden, ist keine wesentliche Einschränkung, da in Dimension $n \geq 5$ Einbettungen C^∞-dicht in den Immersionen liegen.

Der konkrete Wert der Schranke $\beta(G, n)$ ist nicht bekannt. Für $G \geq 1$ ist im wesentlichen nur die Abschätzung [Si93]

$$4\pi < \beta(G, n) < 8\pi$$

bekannt. Eine zentrale Rolle spielt die Willmore-Vermutung:

Vermutung (Willmore).

$$\beta(1, n) = 2\pi^2$$

oder anders formuliert

$$W(F) \geq 2\pi^2 \quad \text{für alle Einbettungen } F : \mathbb{T}^2 \to S^n.$$

Wenn die Willmore-Vermutung erfüllt ist, liefert der Clifford-Torus

$$\frac{1}{\sqrt{2}} S^1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} S^1 \subset S^3 \subset S^n$$

ein minimierendes F_n. Der Clifford-Torus ist eine flache, kompakte Minimalfläche in S^n mit Volumen $2\pi^2$ ist. Sein Bild unter einer geeigneten stereographischen Projektion auf $\mathbb{R}^3$ ist der Rotationstorus, den wir erhalten wenn wir den Kreis $(x-R)^2 + z^2 = \rho^2$ mit $R/\rho = \sqrt{2}$ um die z-Achse rotieren lassen.

Der Clifford-Torus liegt in den folgenden Klassen von Immersionen, für die die Willmore-Vermutung gezeigt wurde

- flache eingebettete Tori [LiY82, Prop. 2]
- immersierte Tori mit $\widetilde{\mathcal{V}}(F^*g) \leq 1$, also für viele konforme Äquivalenzklassen von Tori [LiY82]. Diese Äquivalenzklassen bilden eine Menge von positivem Maß auf dem Modulraum $\mathcal{M}$ und der Clifford-Torus liegt auf dem Rand dieser Menge.
- Rotationstori, d. h. Tori in $\mathbb{R}^3$ die invariant unter Drehungen um eine Achse sind [LaS84]
- Kanaltori [Sh70], [Wi82, Theorem 44], [HeP92]

Kanaltori sind wie folgt definiert: Sei $c : S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit Krümmung $\kappa(t) \leq \kappa_0$, und sei $\varepsilon < 1/\kappa_0$. Dann heißt der Rand der ε-Umgebung von $c(S^1)$, also die Menge $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid d(c(S^1), p) = \varepsilon\}$ *Kanaltorus*. Ein Kanaltorus ist das Bild einer Immersion eines Torus.

Wir werden in den folgenden Abschnitten die Willmore-Ungleichung für viele spinkonforme Äquivalenzklassen zeigen unter der Voraussetzung, daß das Krümmungsintegral $\mathcal{K}_p(\mathbb{T}^2, F^*g)$ klein genug ist. Der Clifford-Torus liegt ebenfalls auf dem Rand des zugehörigen Bereichs in spin-$\mathcal{M}$. Mit Ausnahme der Klasse des Clifford-Torus ist jedoch die Willmore-Vermutung in diesen spin-konformen Klassen bisher noch nicht gezeigt worden (siehe Abbildung 5.1).

5.2 Immersionen und induzierte Spinoren

In diesem Abschnitt wollen wir erklären, wie wir aus einer Immersion einer Fläche N in eine 3-Mannigfaltigkeit M, auf der es einen Killing-Spinor gibt, einen Spinor auf N induzieren. Dieser Spinor liefert dann eine Abschätzung des Willmore-Funktionals durch den kleinsten Eigenwert des Quadrats des Dirac-Operators auf N. Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind allgemein bekannt. Der Vollständigkeit zuliebe wollen wir die Ergebnisse in einer Fassung, die wir benötigen werden, nochmals herleiten.

Wir wollen im wesentlichen C. Bärs Darstellung aus [Bä97] übernehmen. Viele der Ergebnisse in [Bä97] gelten auch für andere Dimensionen von N und M. Die zentrale

Gleichung von [Bä97] erscheint bereits in seiner früheren Arbeit [Bä96] (Propositionen 2.1 und 2.2).

Die Tatsache, daß eine Immersion einer Fläche N in $\mathbb{R}^3$ einen Spinor ψ auf N induziert, der die Gleichung $D\psi = H\psi$ erfüllt, war jedoch schon zuvor bekannt. Die Suche nach einer zitierbaren, öffentlich verfügbaren Quelle für diesen Sachverhalt gestaltet sich jedoch schwierig. Dies liegt zum Teil daran, daß es formal recht verschiedene Zugänge zu Spinoren auf Flächen gibt, zum anderen Teil aber auch daran, daß viele Quellen nicht einfach verfügbar sind. Verschiedene Autoren zitieren z. B. immer wieder „Notes“ von Seminaren aus Amherst und Luminy, die in dieser Form wohl nicht veröffentlicht wurden. Der Zusammenhang zwischen Spinoren und Immersionen spielt in Arbeiten von Pinkall, Taimanov und ihren Arbeitsgruppen eine große Rolle (z. B. [Tai97, Tai97a, Ri97]). Eine sehr interessante und gut lesbare Arbeit ist [KuS97].

Sei also $F : N \to M$ eine Immersion einer orientierten, geschlossenen Fläche in eine 3-dimensionale Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit (M, g) mit Spin-Struktur $\varphi : P_{\mathrm{Spin}}M \to P_{\mathrm{SO}}M$. Die Fläche N trage die zurückgezogene Metrik F^*g. Den Normalenvektor nennen wir $\mathbf{n}$, und die zweite Fundamentalform (mit Werten im Normalenbündel) sei II. Die Hälfte der Spur von II ist der mittlere Krümmungsvektor $H \cdot \mathbf{n}$ und H ist die mittlere Krümmung.

Wir wollen zunächst erklären, wie man die zurückgezogene Spin-Struktur $F^*\varphi$ erhält. Die Abbildung F induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} F_* : P_{\mathrm{SO}}N &\to P_{\mathrm{SO}}M \\ (e_1, e_2) &\mapsto (\mathbf{n}, F_*e_1, F_*e_2). \end{aligned}$$

Nun erklären wir das Spin(n)-Hauptfaserbündel über N

$$P_{\mathrm{Spin}}N := \{(q, A) \in P_{\mathrm{Spin}}M \times P_{\mathrm{SO}}N \mid \varphi(q) = F_*(A)\}$$

und erhalten mit den natürlichen Abbildungen ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}}N \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "F^*\varphi"] & P_{\mathrm{Spin}}M \arrow[d, "\varphi"] \\ P_{\mathrm{SO}}N \arrow[r, "F_*"] & P_{\mathrm{SO}}M. \end{tikzcd}$$

$(P_{\mathrm{Spin}}N, F^*\varphi)$ ist nun die *auf N zurückgezogene Spin-Struktur.*

Bemerkung. Im Fall $N = \mathbb{T}^2$ und $M = \mathbb{R}^3$ oder $M = S^3$ ist die zurückgezogene Spin-Struktur bzw. der zugehörige Spin-Homomorphismus eine wichtige Invariante für eine Immersion. Zwei Immersionen $F_1, F_2 : \mathbb{T}^2 \to M$ heißen *regulär homotop*, wenn es eine Homotopie $H : \mathbb{T}^2 \times [0,1] \to M$ von $F_1 = H(\,.\,,0)$ nach $F_2 = H(\,.\,,1)$ gibt, so daß $H(\,.\,,t)$ für alle t eine Immersion ist. Es ist wohlbekannt, daß F_1 und F_2 genau dann regulär homotop sind, wenn die Spin-Homomorphismen der zurückgezogenen Spin-Strukturen übereinstimmen. Außerdem ist F genau dann regulär homotop zu einer Einbettung, wenn die zurückgezogene Spin-Struktur nicht trivial ist.

Nachdem wir nun geklärt haben, wie man die Spin-Struktur zurückzieht, wollen wir nun Spinoren von M auf N zurückziehen. Sei (E_1, E_2) bzw. (E_0, E_1, E_2) die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Wir identifizieren Σ_2 mit Σ_3 so, daß E_1 und E_2 vermöge der Clifford-Multiplikation gleich operieren. Nach unserer Wahl der Darstellung von $\mathbb{C}l(3)$ in Abschnitt 2.1 gilt $\gamma(E_0) = \gamma(E_1)\gamma(E_2)$.

Wegen $\Sigma M = P_{\mathrm{Spin}} M \times_{\mathrm{Spin}(3)} \Sigma_3$ können wir einen Spinor von M lokal in der Form $[q_M, \sigma]$ schreiben, wobei q_M ein lokaler Schnitt von $P_{\mathrm{Spin}} M$ und σ eine lokale Σ_3-wertige Funktion ist. Wir können q_M und σ sogar so wählen, daß $q_M|_{\mathrm{bild}\, F}$ in $F_*(P_{\mathrm{Spin}} N)$ liegt, d. h. es gibt einen lokalen Schnitt q_N von $P_{\mathrm{Spin}} N$, so daß $F_* \circ q_N = q_M \circ F$. Wir definieren nun den Pullback von Ψ

$$F^*\Psi := [q_N, \sigma \circ F]\,.$$

Diese Definitionen ist unabhängig von der Wahl der Umgebung und der Wahl von q_M und somit auch global wohldefiniert.

PROPOSITION 5.2.1. *Für $i = 1, 2$ gilt*

$$F^*\left(\nabla^{\Sigma M}_{e_i}\Psi\right) = \nabla^{\Sigma N}_{e_i} F^*\Psi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} F^*\Big(\gamma(e_j)\gamma(I\!I(e_i,e_j))\Psi\Big).$$

Beweis. Wir wählen einen lokalen Schnitt q_M von $P_{\mathrm{Spin}} M$ und einen lokalen Schnitt q_N, so daß $F_* \circ q_N = q_M \circ F$. Wir schreiben auch wiederum $(e_0, e_1, e_2) = \varphi \circ q_M$. Dann gilt auch $F^*\varphi \circ q_N = (e_1, e_2)$.

Seien $\tilde\Gamma^k_{ij}$ bzw. Γ^k_{ij} die Christoffelsymbole von $\varphi \circ q_M$ bzw. $F^*\varphi \circ q_N$. Es gilt für $i, j, k \in \{1, 2\}$

$$\tilde\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} \qquad \tilde\Gamma^0_{ij}\, e_0 = -\tilde\Gamma^j_{i0}\, e_0 = I\!I(e_i, e_j) \qquad \tilde\Gamma^0_{i0} = 0.$$

Nach Formel (2.1.1) gilt für $i = 1, 2$

$$F^*\left(\nabla^{\Sigma M}_{e_i}[q_M, \sigma]\right) = \left[q_N, \partial_{e_i}\sigma \circ F + \frac{1}{4}\sum_{j,k=0}^{2} \tilde\Gamma^k_{ij}\gamma(E_j)\gamma(E_k)\sigma \circ F\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \Big[q_N, \partial_{e_i}\sigma \circ F + \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \gamma(E_j)\gamma(E_k)\sigma \circ F \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \gamma(E_j)\gamma(I\!I(e_i, e_j))\,\sigma \circ F\Big] \\
&= \nabla_{e_i}^{\Sigma N} F^*[q_M, \sigma] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} F^*\Big(\gamma(e_j)\gamma(I\!I(e_i, e_j))[q_M, \sigma]\Big). \qquad \square
\end{aligned}$$

PROPOSITION 5.2.2.

$$F^*\left(D^{\Sigma M}\Psi - \gamma(\mathbf{n})\nabla_{\mathbf{n}}^{\Sigma M}\Psi\right) = D^{\Sigma N} F^*\Psi - F^*\left(H\gamma(\mathbf{n})\Psi\right)$$

Beweis. Diese Proposition folgt aus der vorigen, indem wir mit $\gamma(e_i)$ von links Clifford-multiplizieren und über $i = 1, 2$ aufsummieren. $\square$

SATZ 5.2.3. *Die 3-Mannigfaltigkeit (M, g) trage einen nicht-trivialen Killing-Spinor Ψ zur Killing-Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $N \to M$ die Immersion einer geschlossenen orientierten Fläche in M und sei D der Dirac-Operator auf (N, F^*g) bezüglich der induzierten Spin-Struktur. Ist λ_1 der kleinste Eigenwert von D^2, dann gilt*

$$\lambda_1 \operatorname{area}(N, F^*g) \leq \int_N \left(4\alpha^2 + (H \circ F)^2\right) \operatorname{dvol}_{F^*g}.$$

Insbesondere, ist (M, g) konform äquivalent zu einer offenen Teilmenge von S^3 mit der Standard-Metrik, dann gilt

$$\lambda_1 \operatorname{area}(N, F^*g) \leq W(F).$$

Mit Satz 2.2.4 folgt hieraus sofort das Korollar

KOROLLAR 5.2.4 (Willmore-Ungleichung für S^2). *Ist $F : S^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, so gilt*

$$W(F) \geq 4\pi.$$

Beweis von Satz 5.2.3. Nach Definition gilt

$$\nabla_V^{\Sigma M}\Psi = \alpha\gamma(V)\Psi \quad \text{für alle Vektorfelder } V.$$

Also ist

$$D^{\Sigma M}\Psi - \gamma(\mathbf{n})\nabla_{\mathbf{n}}^{\Sigma M}\Psi = -2\alpha\Psi.$$

Anwendung der letzten Proposition liefert

$$\begin{aligned}
D^{\Sigma N} F^*\Psi &= F^*\left(H\gamma(\mathbf{n})\Psi - 2\alpha\Psi\right) \\
&= H\gamma(e_1)\gamma(e_2)F^*\Psi - 2\alpha F^*\Psi
\end{aligned}$$

Beachten wir, daß $D^{\Sigma N}\gamma(e_1)\gamma(e_2) = -\gamma(e_1)\gamma(e_2)D^{\Sigma N}$, so erhalten wir für

$$\psi := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(F^*\Psi + \gamma(e_1)\gamma(e_2)F^*\Psi\Big)$$

die Gleichung

$$D^{\Sigma N}\psi = \Big(H + 2\alpha\gamma(e_1)\gamma(e_2)\Big)\psi. \tag{5.2.1}$$

Wir sagen im folgenden, daß ψ ein *von der Immersion F induzierter Spinor* sei. Da Killing-Spinoren zu reellen Killing-Konstanten konstante Länge haben, können wir $|\psi| = |\Psi| = 1$ annehmen.

Ist nun λ_1 der kleinste Eigenwert von D^2, dann erhalten wir mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\lambda_1 \operatorname{area}(N, F^*g) &\le \int_N \left|D^{\Sigma N}\psi\right|^2 \mathrm{dvol}_{F^*g} = \int_N \left|\Big(H\circ F + 2\alpha\gamma(e_1)\gamma(e_2)\Big)\psi\right|^2 \mathrm{dvol}_{F^*g}\\ &= \int_N \Big((H\circ F)^2 + 4\alpha^2\Big)\, \mathrm{dvol}_{F^*g},\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, daß $\gamma(e_1)\gamma(e_2)$ schief-hermitesch operiert. Wir haben somit die erste Aussage gezeigt.

Ist (M, g) konform äquivalent zu einer offenen Teilmenge der (runden) S^3, so können wir aufgrund des Satzes von Weiner annehmen, daß (M, g) gleich der S^3 ist. Die 3-Späre S^3 hat aber $K \equiv 1$ und einen Killing-Spinor zur Killing-Konstante $\alpha = 1/2$. Also folgt auch die zweite Aussage. □

5.3 Multiplikative Abschätzung

In diesem Abschnitt kombinieren wir die Ergebnisse des letzten Abschnitts mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.3 und erhalten hieraus eine Abschätzung des Willmore-Funktionals nach unten, die nur Größen der inneren Geometrie enthält.

In diesem Abschnitt sei $F : \mathbb{T}^2 \to S^3$ eine Immersion. Wir definieren für $p > 1$ ähnlich wie in den früheren Kapiteln

$$\mathcal{K}_p := \mathcal{K}_p(\mathbb{T}^2, F^*g) := \|K_{F^*g}\|_{L^p(\mathbb{T}^2,F^*g)} \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, F^*g)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Die Schranke $\mathcal{Q} : [0, 4\pi[\times]1, \infty] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sei wie in Abschnitt 4.2 definiert, also

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\mathcal{K}, p, \mathcal{V}) := \exp\Bigg[\,\left|\log\left(1 - \frac{\mathcal{K}}{4\pi}\right)\right| &+ \frac{\mathcal{K}}{4\pi - \mathcal{K}}\, q\log(2q)\\ &+ \frac{q\mathcal{K}}{2\pi} + \frac{\mathcal{K}\mathcal{V}}{4}\Bigg]\end{aligned}$$

mit $q := p/(p-1)$.

Um die Formeln kurz zu halten, wollen wir im folgenden die Konvention treffen: Wenn wir $\mathcal{Q}$ ohne Argument schrieben, so ist die Aussage sowohl für

$$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(\mathcal{K}_p, p, \mathcal{V}(F^*g))$$

als auch für

$$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(\mathcal{K}_p, p, \widetilde{\mathcal{V}}(F^*g))$$

wahr. Unter anderem hängt $\mathcal{Q}$ nur von der inneren Geometrie ab, also von $(\mathbb{T}^2, F^*g)$, aber nicht von H!

Aus Lemma 4.1.2 und den Sätzen 4.3.2 und 5.2.3 erhalten wir nun unmittelbar das Theorem:

THEOREM 5.3.1. *Sei $F : \mathbb{T}^2 \to S^3$ eine Immersion mit $\mathcal{K}_p < 4\pi$ für ein $p > 1$ und $F^*\varphi$ die von auf $\mathbb{T}^2$ induzierte Spin-Struktur. Wir nehmen an, daß $F^*\varphi$ nicht trivial ist, d. h. F sei regulär homotop zu einer Einbettung. Dann gilt*

$$W(F) \geq \mathcal{Q}^{-1}\pi^2 \left\{ \frac{1}{\text{spin-}\widetilde{\mathcal{V}}} + \frac{1}{\text{spin-}\widetilde{\mathcal{W}}} - 2\sqrt{\frac{1}{\text{spin-}\widetilde{\mathcal{V}}\ \text{spin-}\widetilde{\mathcal{W}}} - 1} \right\},$$

wobei die Größen spin-$\widetilde{\mathcal{W}}$ und spin-$\widetilde{\mathcal{V}}$ die in Abschnitt 3.3 definierten konformen Invarianten von $(\mathbb{T}^2, F^*g, F^*\varphi)$ sind und $\mathcal{Q}$ wie oben definiert ist.

Wir bekommen daraus das Korollar:

KOROLLAR 5.3.2. *Sei $(x, y) \in \text{spin-}\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ mit*

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 > 1$$

und $p > 1$. Dann gibt es eine Schranke $C(x, y, p) > 0$ so daß gilt:
Ist $F : \mathbb{T}^2 \to S^3$ eine Immersion und liegt F^*g in der spin-konformen Äquivalenzklasse von

$$\frac{\mathbb{R}^2}{\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}}, \qquad \chi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \chi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -1,$$

und ist $\mathcal{K}_p(\mathbb{T}^2, F^*g) < C(x, y, p)$ erfüllt, dann gilt die Willmore-Ungleichung

$$W(F) \geq 2\pi^2.$$

Beweis des Korollars. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer von Theorem 5.3.1 ist gleich

$$y + \frac{(1-x)^2}{y}.$$

Dieser Term ist genau dann größer als 2 ist, wenn $(x-1)^2 + (y-1)^2 > 1$. □

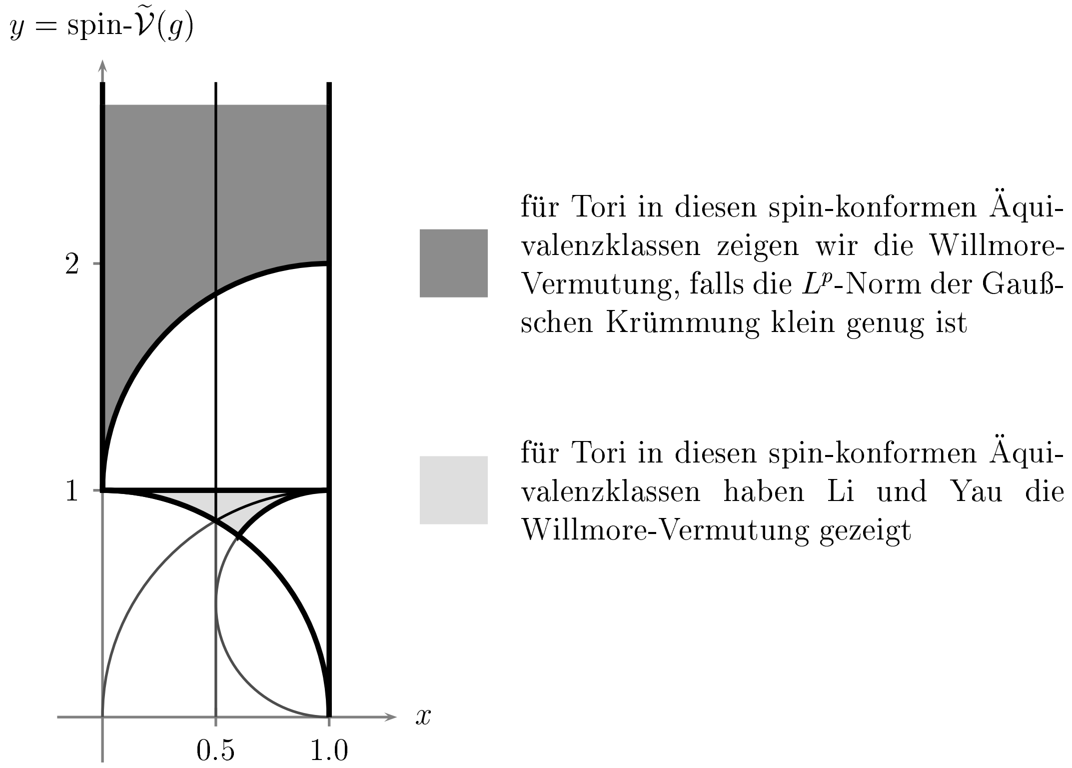


Abbildung 5.1: Die große Zusammenhangskomponente spin-$\mathcal{M}$ des spin-konformen Modulraums

Aus Korollar 4.3.3 und Satz 5.2.3 folgt auch unmittelbar:

THEOREM 5.3.3. *Ist $F : \mathbb{T}^2 \to S^3$ eine Immersion, die regulär homotop zu einer Einbettung ist, und haben wir $\mathcal{K}_p < 4\pi$ für ein $p > 1$, dann gilt*

$$W(F) \geq \pi^2 \left\{ \frac{1}{\mathcal{Q}\,\text{spin-}\mathcal{V}} + \frac{1}{\mathcal{Q}\,\text{spin-}\mathcal{W}} - 2\sqrt{\frac{1}{\text{spin-}\mathcal{V}\;\text{spin-}\mathcal{W}} - \frac{1}{\mathcal{Q}^2}} \right\}$$
$$W(F) \geq \frac{\pi^2\,\text{area}}{\mathcal{Q}\,{\text{spin-sys}_1}^2},$$

wobei die Größen spin-sys$_1$, spin-$\mathcal{W}$, spin-$\mathcal{V}$ *und $\mathcal{Q}$ für den Riemannschen 2-Torus $(\mathbb{T}^2, F^*g)$ zu nehmen sind, der mit der von F induzierten Spin-Struktur versehen ist.*

Der wesentliche Unterschied zwischen Theorem 5.3.1 und Theorem 5.3.3 ist, daß im ersteren die konformen Invarianten spin-$\widetilde{\mathcal{V}}$ und spin-$\widetilde{\mathcal{W}}$ benutzt werden, wohingegen im zweiten die i. a. leichter zu berechnenden Invarianten spin-$\mathcal{V}$ und spin-$\mathcal{W}$ eingehen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch eine Abschätzung für den Fall angeben, daß die zurückgezogene Metrik flach ist.

PROPOSITION 5.3.4. *Sei $F : \mathbb{T}^2 \to S^3$ eine Immersion, die regulär homotop zu einer Einbettung ist, und sei F^*g flach. Wir wählen $(x, y) \in$ spin-$\mathcal{M}$ so, daß der Torus $(\mathbb{T}^2, F^*g, F^*\varphi)$ homothetisch zu*

$$T(x,y) := \frac{\mathbb{R}^2}{\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}}$$

ist, wobei die Spin-Struktur auf $T(x, y)$ durch den Spin-Homomorphismus χ mit

$$\chi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \chi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -1$$

gegeben ist. Dann gilt

$$W(F) \geq \pi^2\left[y + \frac{(1-x)^2}{y}\right].$$

Unter anderem gilt die Willmore-Ungleichung für

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1.$$

Leider ist die letzte Abschätzung aber schlechter als die Abschätzung in [LiY82, Prop. 2]. Li und Yau zeigen dort für $(x-1)^2 + y^2 \geq 1$

$$W(F) \geq \pi^2\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

und für $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

$$W(F) \geq \pi^2\left(\frac{y}{y^2 + (1-x)^2} + \frac{y^2 + (1-x)^2}{y}\right).$$

5.4 Additive Abschätzung

In diesem Abschnitt wollen wir eine Variation der Ergebnisse des letzten Abschnittes beschreiben. Um dieses Ergebnis herzuleiten, benutzen wir diesmal nicht Theorem 4.3.2. Statt dessen führen wir einen anderen „konformen Transport" von Spinoren durch als in Satz 4.3.1. Wir erhalten einen additiven Krümmungsterm anstelle des multiplikativen. Insbesondere bei großem spin-$\mathcal{V}$ und nicht zu großer Oszillation der Streckungsfunktion u liefert diese Abschätzung bessere Ergebnisse. Es sei wieder

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}, p, \mathcal{V}) := \frac{1}{2}\left|\log\left(1 - \frac{\mathcal{K}}{4\pi}\right)\right| + \frac{\mathcal{K}}{8\pi - 2\mathcal{K}}\, q\log(2q) + \frac{q\mathcal{K}}{4\pi} + \frac{\mathcal{K}\mathcal{V}}{8}$$

mit $q := p/(p-1)$.

SATZ 5.4.1. *Sei $F : \mathbb{T}^2 \to S^3$ eine Immersion des 2-Torus $\mathbb{T}^2$ in die S^3 mit der Standardmetrik g. Die induzierte Spin-Struktur $F^*\varphi$ sei nicht trivial, d. h. F sei regulär homotop zu einer Einbettung. Die spin-konforme Struktur von $(\mathbb{T}^2, F^*g, F^*\varphi)$ habe die Koordinaten (x, y) im Modulraum* spin-$\mathcal{M}$. *Dann gilt*

$$W(F) = \left(y + \frac{(1-x)^2}{y}\right) - \frac{1}{8}\,(\operatorname{osc} u)\ \|K_{F^*g}\|_{L^1(\mathbb{T}^2, F^*g)}\,.$$

Unter anderem gilt für jedes $p > 1$ mit $\mathcal{K}_p(F^*g) < 4\pi$

$$W(F) = \left(y + \frac{(1-x)^2}{y}\right) - \frac{1}{8}\,\mathcal{S}\ \|K_{F^*g}\|_{L^1(\mathbb{T}^2, F^*g)}$$

mit $\mathcal{S} := \mathcal{S}\left(\mathcal{K}_p(F^*g), p, \mathcal{V}(F^*g)\right)$ oder $\mathcal{S} := \mathcal{S}\left(\mathcal{K}_p(F^*g), p, \widetilde{\mathcal{V}}(F^*g)\right)$.

Beweis. Die zurückgezogene Metrik F^*g auf $\mathbb{T}^2$ können wir in der Form $F^*g = e^{2u}\tilde{g}$ schreiben mit $\tilde{g}$ flach. Wie in Abschnitt 5.2, Gleichung (5.2.1) induzieren die Immersion F und ein Killing-Spinor auf S^3 zur Killing-Konstante $\alpha = (1/2)$ wieder einen Spinor ψ auf $(\mathbb{T}^2, F^*g)$. Dieser Spinor erfüllt die Gleichung

$$D_{F^*g}\psi = H\psi + \nu\psi,$$

wobei

$$\nu = \gamma(e_1)\gamma(e_2) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \operatorname{End}\left(\Sigma^+\mathbb{T}^2 \oplus \Sigma^-\mathbb{T}^2\right).$$

Mit [Hit74] oder [Hij86, 4.3.1] sieht man nun, daß es einen Vektorraumhomomorphismus

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbb{T}^2 &\to \widetilde{\Sigma}\mathbb{T}^2 \\ \Psi &\mapsto \widehat{\Psi} \end{aligned}$$

gibt, für den

$$e^u\,\widehat{\overbrace{D_{F^*g}\Psi}} = D_{\tilde{g}}\widehat{\Psi} + \frac{1}{2}\gamma_{\tilde{g}}(\operatorname{grad}_{\tilde{g}} u)\widehat{\Psi}$$

und

$$|\widehat{\Psi}| = |\Psi|.$$

Man beachte hierbei, daß für das $\widetilde{\Psi}$ aus Abschnitt 4.3 gilt $\widetilde{\Psi} = e^{(u/2)}\widehat{\Psi}$.

Wir wenden diese Transformation nun auf $\Psi = \psi$ an und erhalten

$$D_{\tilde{g}}\widehat{\psi} = -\frac{1}{2}\gamma_{\tilde{g}}(\operatorname{grad}_{\tilde{g}} u)\widehat{\psi} + e^u H\widehat{\psi} + e^u\nu\widehat{\psi}.$$

Da ν, $\gamma(V)$ und $\nu\gamma(V)$ für einen beliebigen Vektor V schief-hermitesch sind, ergibt dies

$$\begin{aligned}\left|D_{\tilde{g}}\widehat{\psi}\right|^2 &= \frac{1}{4}\left|\gamma_{\tilde{g}}(\mathrm{grad}_{\tilde{g}}u)\widehat{\psi}\right|^2 + e^{2u}H^2\left|\widehat{\psi}\right|^2 + e^{2u}\left|\nu\widehat{\psi}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|du\right|^2_{\tilde{g}} + e^{2u}H^2 + e^{2u}.\end{aligned}$$

Integration über $(\mathbb{T}^2, \tilde{g})$ liefert nun

$$\tilde{\lambda}_1 \mathrm{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) \leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^2} |du|^2_{\tilde{g}}\,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} + W(F),$$

wobei $\tilde{\lambda}_1$ den kleinsten Eigenwert des Quadrat des Dirac Operators auf $(\mathbb{T}^2, \tilde{g})$ bezeichnet.

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2} |du|^2_{\tilde{g}}\,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} &= \int_{\mathbb{T}^2} u\Delta_{\tilde{g}}u\,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} e^{2u}uK_g\,\mathrm{dvol}_{\tilde{g}} \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} uK_g\,\mathrm{dvol}_{F^*g} \\ &\leq \frac{1}{2}(\mathrm{osc}\,u)\,\|K_g\|_{L^1(\mathbb{T}^2, F^*g)}.\end{aligned}$$

Und hieraus folgen zusammen mit Theorem 3.5.1 und Lemma 4.1.2 die Behauptungen. □

Wir könnten nun ausgehend von Satz 5.4.1 analoge Sätze zu den Theoremen 5.3.1 und 5.3.3 formulieren. Da es aber recht offensichtlich ist, wie diese aussehen werden, soll aus Platzgründen darauf verzichtet werden.

5.5 Die Kugelkette

Die Abschätzungen des Willmore-Integrals in den letzten beiden Abschnitten enthielten Krümmungsterme, wohingegen die Willmore-Vermutung keinen derartigen Krümmungsterm enthält. Im Fall der Immersionen von $F : S^2 \to S^3$ existiert eine Spektralabschätzung, die keine Krümmungsterme enthält (Satz 2.2.4). Aus ihr folgt die optimale Schranke an das Willmore-Integral

$$W(F) \geq 4\pi.$$

Deswegen ist die Frage naheliegend, ob wir für Immersionen $\mathbb{T}^2 \to S^3$ die Spektralabschätzungen nicht so verbessern können, daß der Krümmungsterm verschwindet, d. h. wir suchen Abschätzungen wie in den vorigen Abschnitten mit 0 anstelle von $\mathcal{S}$ und 1 anstelle von $\mathcal{Q}$. Aus einer derartigen Abschätzung würde dann die Willmore-Vermutung für viele spin-konformen Strukturen folgen.

Zunächst einmal wollen wir die Aussage der Abschätzung im Falle der S^2 etwas umformulieren:
Sei $\lambda(S^2, g)$ der kleinste Eigenwert des Quadrats des Dirac-Operators zu der Metrik g auf S^2, dann gilt

$$4\pi = \inf_g \lambda(S^2, g)\,\mathrm{area}(S^2, g)$$

und das Infimum wird angenommen, wenn (S^2, g) konstante Krümmung hat. Das Infimum geht hierbei über alle Riemannschen Metriken.

Um unsere obige Frage zu präzisieren, formulieren wir sie analog:
Sei $\tilde{g}$ eine flache Metrik auf $\mathbb{T}^2$ mit nicht-trivialem Spin-Homomorphismus $\tilde{\chi}$, und sei $\lambda(\mathbb{T}^2, g, \chi)$ der kleinste Eigenwert des Quadrats des Dirac-Operators zu der Metrik g und zum Spin-Homomorphismus χ.

(1) Ist dann

$$\inf_{(g,\chi)\in[(\tilde{g},\tilde{\chi})]} \lambda(\mathbb{T}^2, g, \chi)\,\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g) > 0,$$

wobei (g, χ) alle zu $(\tilde{g}, \tilde{\chi})$ spin-konform äquivalenten Paare durchläuft?

(2) Wenn ja, wird das Infimum angenommen?

(3) Wenn ja, wird dann das Infimum von einer flachen Metrik angenommen?

Die Frage (1) wurde von John Lott in [Lo86] positiv beantwortet. Offen lassen wollen wir Frage (2).

Zeigen wollen wir in diesem Abschnitt, daß Frage (3) zumindest für manche spin-konforme Äquivalenzklassen nicht erfüllt ist. Wir wollen hierzu eine Familie von Beispiel-Metriken angeben, für die

$$\lambda(\mathbb{T}^2, g, \chi)\,\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, g) < \lambda(\mathbb{T}^2, \tilde{g}, \tilde{\chi})\,\mathrm{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}).$$

Wir haben somit gezeigt, daß eine Spektralabschätzung des Dirac-Operators, die eine optimale Schranke für flache Tori liefert, notwendigerweise einen Krümmungsterm enthalten muß.

Unter einer *Kettenlinie* verstehen wir eine Kurve der Form

$$y = a \cosh \frac{x - b}{a}$$

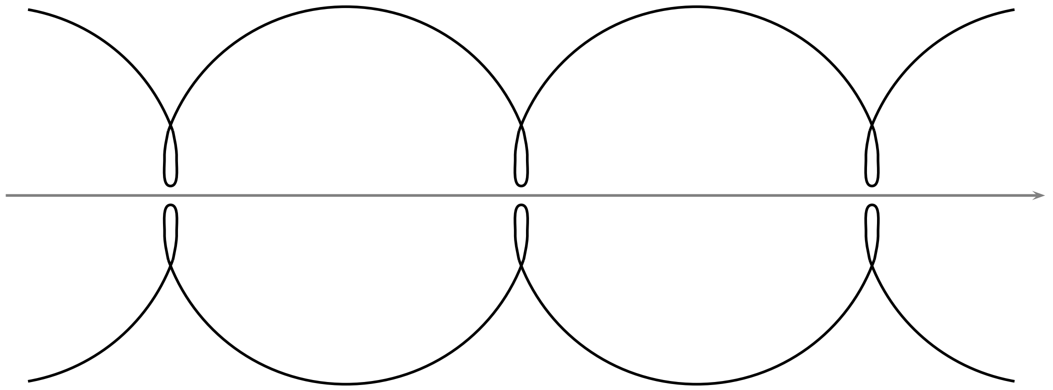


Abbildung 5.2: Die Kugelkette

mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Eine zur x-Achse rotationssymmetrische Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Minimalfläche, wenn sie durch Rotation einer Kettenlinie (oder einem Segment hiervon) erzeugt wird ([Ca92, Seite 153]). Vollständige rotationssymmetrische Minimalflächen heißen *Katenoid*.

Für ein zunächst festes $\delta > 0$ erfülle die reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c_\delta = (c_x, c_y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ die folgenden Eigenschaften:

(1) Es gibt Konstanten $T > \pi - 2\delta$ und $V \in \mathbb{R}$, so daß $c_x(t+T) = c_x(t) + V$ und $c_y(t+T) = c_y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(2) Auf dem Intervall $I_K := [-(\pi/2) + 2\delta, (\pi/2) - 2\delta]$ gilt $c_x(t) = \sin t$ und $c_y(t) = \cos t$.

(3) Auf $I_1 := [-(\pi/2) + \delta, -(\pi/2) + 2\delta]$ und $I_2 := [(\pi/2) - 2\delta, (\pi/2) - \delta]$ liegt die Krümmung der Kurve c_δ zwischen -3 und -1 („negativ" bedeutet nach rechts drehend).

(4) Auf $I_M := [(\pi/2) - \delta, T - (\pi/2) + \delta]$ gilt $\dot{c}_x < 0$, und $c|_{I_M}$ ist eine Kettenlinie.

Man sieht sofort, daß es zu jedem $\delta > 0$ eine derartige Kurve c_δ gibt.

Die Rotationsfläche von c_δ um die x-Achse wollen wir *Kugelkette* nennen. Die Kugelkette ist das Bild einer Immersion $\tilde{F}_\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit Periodengitter $0 \times \mathbb{Z}$ und mit $\tilde{F}_\delta(a+k, b) = \tilde{F}_\delta(a, b) + (kV, 0, 0)$. Somit induziert $\tilde{F}_\delta$ auch eine Immersion F_δ von $\mathbb{T}^2$ in den Zylinder $Z := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}(V, 0, 0)$. Für F_δ können wir das Willmore-Integral definieren, und da Z bezüglich der flachen Metrik einen parallelen Spinor enthält, erhalten wir auch einen induzierten Spinor ψ.

Die Hauptkrümmungen der Rotationsfläche sind die Krümmung der Kurve c_δ und die Funktion $-\dot{c}_x(t)/c_y(t)$. Die mittlere Krümmung ist deswegen konstant -1 auf I_K und konstant 0 auf I_M.

Auf den Übergangsintervallen I_1 und I_2 gilt $|\dot{c}_x| \leq \sin 2\delta$ und $-\delta + \sin 2\delta < c_y < \sin 2\delta$. Deswegen wird für kleine $\delta > 0$ auf ihnen der Betrag der mittleren Krümmung durch

$$\frac{1}{2}\left(3 + \frac{\sin 2\delta}{-\delta + \sin 2\delta}\right) < 3$$

nach oben beschränkt.

Wir berechnen nun das Willmore-Integral

$$W(F_\delta) := \int_0^T H^2(t)\, 2\pi c_y(t)\, dt = \int_{I_1 \cup I_2 \cup I_K} H^2(t)\, 2\pi c_y(t)\, dt$$

Der Beitrag von I_K in diesem Integral ist genau das Volumen der Einheitssphäre ohne zwei „Polkappen“, die jeweils den halben Öffnungswinkel 2δ besitzen. Dieser Beitrag liegt also zwischen $4\pi - 8\pi\delta^2$ und 4π. Der Beitrag von $I_1 \cup I_2$ ist kleiner als $72\pi\delta^2$.

Insgesamt haben wir also

$$|W(F_\delta) - 4\pi| < 72\pi\delta^2.$$

Somit gilt für den kleinsten Eigenwert λ_1 von D^2 auf $(\mathbb{T}^2, F_\delta^* g_{\text{eukl}}, F_\delta^* \varphi)$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, F_\delta^* g_{\text{eukl}}) &\leq (D\psi, D\psi)_{(\mathbb{T}^2, F_\delta^* g_{\text{eukl}})} \\ &= W(F_\delta) \leq 4\pi + 72\pi\delta^2\end{aligned}$$

Sei nun $(\mathbb{T}^2, \tilde{g}, \tilde{\chi})$ flach und spin-konform äquivalent zu $(\mathbb{T}^2, F_\delta^* g_{\text{eukl}}, F_\delta^* \varphi)$. Der Spin-Homomorphismus ist nicht-trivial, da F regulär homotop zu einer Einbettung ist. Seien (x, y) gemeinsame Koordinaten in der großen Zusammenhangskomponente spin-$\mathcal{M}$ des spin-konformen Modulraums. Dann folgt aus Symmetriegründen $x = 0$ und somit $y \geq 1$. Bezeichnet $\tilde{\lambda}_1$ den kleinsten Eigenwert von D^2 auf $(\mathbb{T}^2, \tilde{g}, \tilde{\chi})$, dann erhalten wir

$$\tilde{\lambda}_1 \operatorname{area}(\mathbb{T}^2, \tilde{g}) = \pi^2 \left(y + \frac{1}{y}\right) \geq 2\pi^2.$$

Somit wird das Infimum in (1) gar nicht oder von einer nicht flachen Metrik angenommen. Des weiteren zeigt das Kugelketten-Beispiel, daß ein Krümmungsterm in den Spektralabschätzungen von Theorem 5.3.1 und 5.3.3, Korollar 5.3.2 und Satz 5.4.1 tatsächlich nötig ist.

Kapitel 6

Weitere Abschätzungen von Eigenwerten

6.1 Abschätzung von $\nabla^*\nabla$ auf S^1-Bündeln

In diesem Abschnitt sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Spin-Struktur $\varphi : P_{\mathrm{Spin}}(M) \to P_{\mathrm{SO}}(M)$. Weiter sei $\pi : M \to N$ eine glatte S^1-Faserung. Wir fordern in diesem Abschnitt keine Kompatibilitätsbedingungen zwischen der S^1-Faserung und der Riemannschen Metrik, also weder konstante Länge der Fasern, noch eine (lokale) S^1-Symmetrie der Metrik, und π muß auch keine Riemannsche Submersion sein.

Wir wollen eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert des Zusammenhangs-Laplace herleiten. Diese Abschätzung wird einige geometrische Größen einbeziehen, die sich aus der S^1-Faserung und der Riemannschen Metrik auf M ergeben. Dies sind

- die Faserlänge $2\pi\ell : N \to \mathbb{R}^+$,
- die Faserdichte $J : M \to \mathbb{R}^+$ und
- die S^1-Holonomie des Tangentialraums und des Spinorraums.

Die *Faserlänge* $2\pi\ell(p)$ ist die Länge der S^1-Faser über $p \in N$.

Die Riemannsche Metrik von M induziert eine Volumenform dvol_M auf M und eine Volumenform dvol_p auf $\pi^{-1}(p)$. Auf N wählen wir das Bildmaß $\pi_\#(\mathrm{dvol}_M)$. Die Koflächenformel ([Fe69, 3.2.11], [Mo88, 3.8]) besagt nun, daß es eine eindeutige glatte Funktion $J : M \to \mathbb{R}^+$ gibt, so daß

$$\int_M J \cdot f \;\mathrm{dvol}_M = \int_N \pi_\#(\mathrm{dvol}_M) \int_{\pi^{-1}(p)} f \;\mathrm{dvol}_p. \tag{6.1.1}$$

für alle $f \in L^1(M)$. Unter anderem folgt hieraus

$$\int_{\pi^{-1}(p)} \frac{1}{J} \;\mathrm{dvol}_p = 1. \tag{6.1.2}$$

Da $J(m)$ ausdrückt, wie nahe beieinander die Fasern in der Nähe von m liegen, nennen wir J die *Faserdichte*. Trägt N eine Riemannsche Metrik, die $\pi_\#(\mathrm{dvol}_M)$ induziert, so ist

$$J = \sqrt{|\det(\pi_* \cdot \pi_*{}^T)|}$$

die $(n-1)$-te Jacobi-Funktion von π. Ist hingegen $\pi : M \to N$ eine Riemannsche Submersion und bezeichnet dvol_N das von der Riemannschen Metrik induzierte Maß, dann gilt $\pi_\#(\mathrm{dvol}_M) = 2\pi\ell\,\mathrm{dvol}_N$, und somit ist $J(m) = 2\pi\ell(\pi(m))$.

Wir wählen nun auf jeder S^1-Faser von M eine Orientierung. Wir verlangen aber nicht, daß diese stetig vom Basispunkt abhängen, denn unsere Ergebnisse gelten teilweise auch dann noch, wenn die Fasern nicht stetig orientierbar sind. Die *S^1-Holonomie* ist die Abbildung, die durch Paralleltransport entlang einer S^1-Faser in positiver Richtung entsteht. Wir schreiben z. B. $\mathrm{Hol}_{TM}(m) \in \mathrm{SO}(T_mM)$ für die S^1-Holonomie des Tangentialbündels und $\mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m) \in \mathrm{U}(\Sigma_m M)$ für die S^1-Holonomie des Spinorbündels. Jeder Eigenwert $\lambda \neq \pm 1$ von $\mathrm{Hol}_{TM}(m)$ kommt zusammen mit seinem Inversen vor. Also ist die Menge der Eigenwerte von $\mathrm{Hol}_{TM}(m)$ unabhängig von der Wahl der Orientierungen auf den S^1-Fasern und, da die Holonomien auf einer Faser konjugiert sind, nur eine Funktion des Basispunkts. Wir erhalten insgesamt Abbildungen $\lambda_j : N \to S^1 \subset \mathbb{C}$, so daß die Eigenwerte von $\mathrm{Hol}_{TM}(m)$ die Zahlen

$$\lambda_1(\pi(m)), \ldots, \lambda_{[n/2]}(\pi(m)), \overline{\lambda}_1(\pi(m)), \ldots, \overline{\lambda}_{[n/2]}(\pi(m))$$

und evtl. 1 (im Fall n ungerade) sind. Wir wollen hierbei wieder die Konvention benutzen, daß mehrfach genannte Zahlen mehrfache Eigenwerte bezeichnen. Die Reihenfolge der Indizes soll erst später festgelegt werden.

Wir benötigen nun ein Lemma, das die Holonomie des Tangential-Bündels mit der Holonomie des Spinor-Bündels vergleicht. Die Spin-Struktur wird hierbei entscheidend eingehen.

LEMMA 6.1.1. *Für $m \in M$ sei $\mathrm{Hol}_{TM}(m) \in \mathrm{End}(T_mM)$ die Holonomie des Tangentialbündels entlang der S^1-Faser über dem Basispunkt $\pi(m)$, und sei $\mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m)$ die entsprechende Holonomie des Spinorbündels ΣM. Wir setzen $q := [\dim M/2]$. Die Holonomie des Tangentialbündels habe die Eigenwerte*

$$\lambda_1, \ldots \lambda_q, \overline{\lambda}_1, \ldots \overline{\lambda}_q$$

und für ungerades $n = \dim M$ zusätzlich 1.

Wir wählen nun Wurzeln τ_j mit $\tau_j^2 = \lambda_j$. Dann gibt es ein Vorzeichen $v \in \{+1, -1\}$, so daß $\mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m)$ *die Eigenwerte*

$$\left(v \cdot \tau_1^{\delta_1} \cdots \tau_q^{\delta_q} \;\middle|\; \delta_1, \ldots, \delta_q \in \{+1, -1\}\right)$$

hat. Das Vorzeichen v hängt von der Wahl der Wurzeln, von der Spin-Struktur und von $\pi(m)$ ab.

ZUSATZ 6.1.2. *Es gelte für alle $p \in N$ zusätzlich $\lambda_j = \exp(2i\mu_j) \neq -1$ mit $\pi/2 < \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_q < \pi/2$. Die λ_j und $\tau_j := \exp(2i\mu_j)$ sind also stetig in p. Dann ist das dazugehörende v lokal konstant.*

Frage: Ist die Voraussetzung $\lambda_j \neq -1$ tatsächlich nötig?

Für gerade Dimension n ist die Aufspaltung $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$ parallel; also hat $\mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m)$ Blockgestalt mit den Blöcken $\mathrm{Hol}_{\Sigma^+ M}(m)$ und $\mathrm{Hol}_{\Sigma^- M}(m)$, den Holonomien der Bündel $\Sigma^+ M$ und $\Sigma^- M$. Die Eigenwerte von $\mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m)$ zerfallen dementsprechend in die Eigenwerte von $\mathrm{Hol}_{\Sigma^+ M}(m)$ und $\mathrm{Hol}_{\Sigma^- M}(m)$. Wir bekommen den Zusatz:

ZUSATZ 6.1.3. *Unter den Bedingungen des vorangehenden Lemmas gibt es ein $w \in \{-1, 1\}$, so daß* $\mathrm{Hol}_{\Sigma^+ M}(m)$ *die folgenden Eigenwerte hat:*

$$\left(v \cdot \tau_1^{\delta_1} \cdots \tau_q^{\delta_q} \;\middle|\; \delta_1, \ldots, \delta_q \in \{+1, -1\}, \prod_{j=1}^{q} \delta_j = w \right).$$

Und $\mathrm{Hol}_{\Sigma^- M}(m)$ *hat die Eigenwerte*

$$\left(v \cdot \tau_1^{\delta_1} \cdots \tau_q^{\delta_q} \;\middle|\; \delta_1, \ldots, \delta_q \in \{+1, -1\}, \prod_{j=1}^{q} \delta_j = -w \right).$$

Das Vorzeichen w hängt von der Wahl der λ_j ab.

Wir greifen wieder unsere Beispiele aus Abschnitt 2.6 auf.

Beispiel 1. Sei $\pi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^{n-1}$ eine Riemannsche Submersion flacher Tori. Sei ε_n der Erzeuger von Kern $(\pi_1 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^{n-1})$. Dann gilt für den Spin-Homomorphismus χ

$$\mathrm{Hol}_{\Sigma \mathbb{T}^n}(m) = \chi(\varepsilon_n),$$

wobei χ der Spin-Homomorphismus ist. Analoges gilt für $N \times S^1 \to N$ mit der Produktmetrik.

Beispiel 2. Trägt $M_k := \Gamma_k\backslash\mathcal{H}_3$ eine Metrik, die von einer linksinvarianten Metrik auf $\mathcal{H}_3$ stammt, dann ist die S^1-Holonomie Hol_{TM} der Riemannschen Submersion $M_k \to \mathbb{T}^2$ eine Drehung um einen konstanten Winkel α um eine Achse in Faserrichtung. $\mathrm{Hol}_{\Sigma^\pm M}(m)$ ist dann eine Drehung um $\beta = \pm\alpha/2$ oder $\beta = \pi \pm (\alpha/2)$ — je nach Spin-Struktur. Lassen wir die Faserlänge gegen 0 gehen bei konstanter Basis $\mathbb{T}^2$, dann geht β für die triviale und 3 andere Spin-Strukturen gegen 0. Ist k gerade, so gibt es 4 weitere Spin-Strukturen; für diese Spin-Strukturen geht β gegen π.

Beispiel 3. Trägt S^{2q+1} die Standardmetrik, dann hat $S^{2q+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^q$ eine S^1-Holonomie $\mathrm{Hol}_{TS^{2q+1}} = \mathrm{Id}$. Die S^1-Holonomie des Spinorbündels ist also $\mathrm{Hol}_{\Sigma S^{2q+1}} = \pm\,\mathrm{Id}$. Das Vorzeichen bestimmen wir mit folgendem Argument: Die Fasern der Hopf-Faserung sind Großkreise. Zu bestimmen ist also die Holonomie entlang eines Großkreises. Wir betrachten die Inklusion $F : S^{2q+1} \to \mathbb{R}^{2q+2}$. Die Abbildung F induziert analog zu Abschnitt 5.2 eine fasererhaltende, $\mathrm{SO}(2q+1)$-äquivariante Abbildung $F_* : P_{\mathrm{SO}}S^{2q+1} \to P_{\mathrm{SO}}\mathbb{R}^{2q+2}$. Außerdem induziert F eine zurückgezogene Spin-Struktur auf S^{2q+1}. Weil es aber auf S^{2q+1} nur eine Spin-Struktur gibt, ist dies die richtige. Sei nun A ein paralleler Schnitt von $P_{\mathrm{SO}}S^{2q+1}$ längs eines gegebenen Großkreises. Da die zweite Fundamentalform von $S^{2q+1} \subset \mathbb{R}^{2q+2}$ in Richtung des Großkreises nicht verschwindet, ist F_*A nicht parallel. Es ist eine „Drehung um 360^o“. Derartige Drehungen liften nicht auf $P_{\mathrm{Spin}}\mathbb{R}^{2q+2}$. Also liftet auch A nicht auf $P_{\mathrm{Spin}}S^{2q+1}$. Folglich gilt $\mathrm{Hol}_{\Sigma S^{2q+1}} \neq \mathrm{Id}$, also $\mathrm{Hol}_{\Sigma S^{2q+1}} = -\,\mathrm{Id}$.

Beweis von Lemma 6.1.1. Um die Notation zu vereinfachen, unterdrücken wir in diesem Abschnitt die Darstellung γ, d. h. wir betrachten $\mathrm{Spin}(n)$ und $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ als Endomorphismen von Σ_n.

Sei $c : \mathbb{R} \to \pi^{-1}(\pi(m))$ mit $c(0) = m$ eine 2π-periodische Kurve, die modulo 2π die S^1-Faser durch m parametrisiert. Wir nehmen nun einen parallelen Schnitt $A : \mathbb{R} \to P_{\mathrm{Spin}}(M)$ des $\mathrm{Spin}(n)$-Prinzipal-Bündels $P_{\mathrm{Spin}}(M) \to M$ entlang der Kurve c. Dann ist $\varphi \circ A$ ein paralleler Schnitt von $P_{\mathrm{SO}}(M) \to M$. Nach Definition der Holonomie gilt

$$\begin{aligned} \varphi\,(A_{2\pi}) &= \mathrm{Hol}_{TM}(m) \cdot \varphi\,(A_0) \\ A_{2\pi} &= \mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m) \cdot A_0. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Elemente von $P_{\mathrm{Spin}}(M)$ bzw. $P_{\mathrm{SO}}(M)$ als isometrische Isomorphismen von Σ_n nach $\Sigma_m M$ bzw. von $\mathbb{R}^n$ nach $T_m M$. Wir berechnen hiermit die zu $\mathrm{Hol}_{TM}(m)$ konjugierte Matrix $H_T \in \mathrm{SO}(n)$.

$$H_T := \varphi(A_0)^{-1}\mathrm{Hol}_{TM}(m)\varphi(A_0) = \varphi(A_0)^{-1}\varphi\left(\mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m)A_0\right).$$

Die Überlagerung $\Theta : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ erfüllt $\varphi(A)\Theta(B) = \varphi(AB)$ und somit $\Theta(A^{-1}C) = \varphi(A)^{-1}\varphi(C)$. Also folgt insgesamt

$$H_T = \Theta\left({A_0}^{-1}\mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m)A_0\right) = \Theta(H_\Sigma)$$

mit $H_\Sigma := {A_0}^{-1}\mathrm{Hol}_{\Sigma M}(m)A_0 \in \mathrm{Spin}(n)$.

Da Konjugation einer Matrix die Eigenwerte nicht verändert, müssen wir nur noch untersuchen, welche Relationen zwischen den Eigenwerten von H_T und den Eigenwerten von H_Σ gelten.

Die Eigenwerte von H_T seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_q, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_q$ und zusätzlich 1, falls n ungerade. Wir wählen reelle μ_j mit $\lambda_j = \exp(2i\mu_j)$. Nach einem geeigneten isometrischen Basiswechsel können wir dann annehmen, daß

$$H_T = \exp\left(\sum_{j=1}^{q} 2\mu_j E_j \wedge E_{j+q}\right), \tag{6.1.3}$$

wobei $E_j \wedge E_k$ $(j \neq k)$ den Endomorphismus bezeichnet, der E_j auf E_k, E_k auf $-E_j$ und alle andern Basisvektoren auf 0 abbildet. Sollte dieser Basiswechsel nicht orientierungserhaltend sein, dann vertauschen wir die Rolle von λ_1 und $\overline{\lambda}_1$. Deswegen können wir sogar annehmen, daß der Basiswechsel die Orientierung erhält.

Die beiden Urbilder von H_T unter Θ gehen durch Multiplikation mit $-\mathrm{Id}$ auseinander hervor. Durch Anwenden von $\Theta \circ \exp = \exp \circ \Theta_*$ und $\Theta_*(E_i \cdot E_j) = 2E_i \wedge E_j$ (siehe [LaM89, Proposition I.6.2]) erhalten wir deswegen

$$H_\Sigma = v \exp\left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j E_j \cdot E_{j+q}\right) \qquad v \in \{+1, -1\}.$$

Das Vorzeichen v hängt dabei von der Spin-Struktur und der Wahl der μ_j ab.

Wir zeigen nun, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} L : \Sigma_n &\to \Sigma_n \\ \sigma &\mapsto \left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j E_j \cdot E_{j+q}\right) \cdot \sigma \end{aligned}$$

die Eigenwerte $(\pm\mu_1 \pm \mu_2 \pm \ldots \pm \mu_q)i$ hat, wobei die $\pm$ unabhängig voneinander variieren und somit $2^q = \dim \Sigma_n$ viele Eigenwerte ergeben. Die Eigenwerte von vH_Σ sind dann die Exponentiale der Eigenwerte von L. Da wir annehmen können, daß $\tau_j = \exp(i\mu_j)$, folgt dann hieraus der Satz.

Zur Berechnung der Eigenwerte von L schreiben wir $L = \sum \mu_j \omega_j$ mit $\omega_j := E_j \cdot E_{j+q}$. Man sieht sofort, daß die ω_j mit $j = 1, \ldots, q$ paarweise kommutieren und deswegen deren Darstellungen simultan diagonalisierbar sind. Sei Ψ ein gemeinsamer Eigenvektor. Da $\omega_j^2 = -1$ sind die zugehörigen Eigenwerte aus $\{+i, -i\}$. Für $k, j \leq q$ mit $k \neq j$ haben wir $E_j\omega_j + \omega_j E_j = 0$ und $E_j \omega_k = \omega_k E_j$, und somit ist $E_j\Psi$ ebenfalls ein gemeinsamer Eigenvektor. Die Vektoren Ψ und $E_j\Psi$ liegen genau dann im selben

Eigenvektorraum von ω_k, wenn $k \neq j$. Andernfalls liegt einer im i- und einer im $-i$-Eigenraum. Durch Induktion sehen wir, daß auch $E_{j_1} \dots E_{j_l}\Psi$ ein gemeinsamer Eigenvektor aller ω_k ist. Jedes E_j wechselt hierbei das Vorzeichen des Eigenwerts zu ω_j. Wir erhalten somit 2^q linear unabhängige gemeinsame Eigenvektoren, die alle Vorzeichenkombinationen durchlaufen. Diese Eigenvektoren sind auch Eigenvektoren von L zu den oben genannten Eigenwerten. $\square$

Beweis von Zusatz 6.1.2. Die Stetigkeit von μ_j, $\lambda_j = \exp(2i\mu_j)$ und $\tau_j = \exp(\mu_j)$ ist offensichtlich.

Sei U eine zusammenhängende Umgebung von m_0. O. B. d. A. sei die Orientierung der S^1-Fasern stetig auf U. Nach eventueller Verkleinerung von U können wir den Schnitt A aus dem vorigen Beweis zu einer stetigen Schar von Schnitten $\hat{A} : \mathbb{R} \times U \to P_{\mathrm{Spin}}(M)$ fortsetzen, so daß m der Fußpunkt von $\hat{A}_0(m)$ ist und jedes $t \to \hat{A}_t(m)$ die Anforderungen an A erfüllt. Wir erhalten stetige $H_T : U \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ und $H_\Sigma : U \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$. Leider können wir nicht annehmen, daß H_T die einfache Darstellung von Gleichung (6.1.3) besitzt, da wir nicht wissen, ob der dafür notwendige Basiswechsel stetig ist, wenn zwei Eigenwerte zusammenfallen.

Die Exponentialabbildung

$$\exp : \mathrm{so}(n) \to \mathrm{SO}(n)$$

ist aber ein Diffeomorphismus von der zusammenhängenden Menge

$$\mathcal{B} := \left\{ A \in \mathrm{so}(n) \;\middle|\; A \text{ ist konjugiert zu } \sum_{j=1}^{q} r_j e_j \wedge e_{j+q} \text{ mit } |r_j| < \pi \right\}$$

auf ihr Bild. Und $H_T(m)$ liegt in $\exp(\mathcal{B})$. Die Menge $\Theta^{-1}(\exp(\mathcal{B}))$ zerfällt in die Zusammenhangskomponenten $\exp({\Theta_*}^{-1}(\mathcal{B}))$ und $-\exp({\Theta_*}^{-1}(\mathcal{B}))$. Da U zusammenhängend ist, ist $H_\Sigma(m)$ für alle $m \in U$ in derselben Zusammenhangskomponente, und somit ist v konstant auf U. $\square$

Beweis von Zusatz 6.1.3. Wir übernehmen die Notationen aus dem Beweis des Lemmas. Dann gilt

$$\omega_{\mathbb{C}} = i^q \cdot (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \omega_1 \cdots \omega_q = i^{q^2} \omega_1 \cdots \omega_q.$$

Sei Ψ ein gemeinsamer Eigenspinor aller ω_j, dann ist es auch ein Eigenspinor von $\omega_{\mathbb{C}}$ und liegt somit entweder in Σ_n^+ oder Σ_n^-. Das daraus konstruierte $E_j\Psi$ liegt im jeweils anderen $\Sigma_n^\pm$. Hieraus folgt dieser Zusatz. $\square$

SATZ 6.1.4. *Sei $\pi : M \to N$ eine S^1-Faserung, deren Totalraum M eine Spin-Struktur und eine Riemannsche Metrik trägt. Wir schreiben die Eigenwerte der S^1-Holonomie des Spinorbündels in der Form* $\exp(i\kappa_j(p))$ *mit $|\kappa_j| \leq \pi$. Dann gilt für jeden Eigenwert λ des Zusammenhangs-Laplace $\nabla^*\nabla$*

$$\lambda \geq \left(\frac{\min\limits_{\substack{p\in N \\ j=1,..,2^q}} |\kappa_j(p)|}{\max\limits_M J} \right)^2 , \tag{6.1.4}$$

wobei J die Faserdichte bedeutet.

Aus dem Beweis des Satzes wird deutlich, daß er auch in der verschärften Version (6.1.5) und in den beiden folgenden Variationen gilt:

$$\lambda \geq \min_{\substack{p\in N \\ j=1,..,2^q}} \left(\frac{\kappa_j(p)}{\max\limits_{\pi^{-1}(p)} J} \right)^2 , \tag{6.1.5}$$

$$\lambda \geq \min_{\substack{p\in N \\ j=1,..,2^q}} \left\{ \frac{\min\limits_{\pi^{-1}(p)} J}{\max\limits_{\pi^{-1}(p)} J} \left(\frac{\kappa_j(p)}{2\pi\ell(p)} \right)^2 \right\}, \tag{6.1.6}$$

$$\lambda \geq \min_{\substack{p\in N \\ j=1,..,2^q}} \frac{\kappa_j(p)^2 \min\limits_{\pi^{-1}(p)} J(m)^2}{\left(\int\limits_{\pi^{-1}(p)} J \,\mathrm{dvol}_p. \right)^2} \tag{6.1.7}$$

Bemerkung. Ist $M \to N$ ein S^1-Hauptfaserbündel und operiert S^1 isometrisch, dann liefert Satz 7.3.1 ein ähnliches Resultat, allerdings unter stärkeren Voraussetzungen (vergleiche die Bemerkung zu Satz 7.3.1).

KOROLLAR 6.1.5. *Sei $\pi : M \to N$ ein S^1-Bündel, das eine Wurzel hat. Wir setzen $q := [\dim M/2]$. Auf der Spin-Mannigfaltigkeit M sei eine Riemannsche Metrik gegeben, so daß die Eigenwerte der Holonomie des Tangentialbündels die Gestalt*

$$\lambda_j = \exp(2i\mu_j) \quad \textit{und} \quad \lambda_{j+q} = \exp(-2i\mu_j) \quad \textit{und evtl.} \ \lambda_{2q+1} = 1$$

mit $\quad 0 \leq \mu_j \leq \mu$ *und* $\mu < \min\{\pi/2, \pi/q\}$ *haben. Dann gibt es auf M eine Spin-Struktur, so daß*

$$\lambda \geq \left(\frac{\pi - q\mu}{\max\limits_M J} \right)^2$$

für alle Eigenwerte λ des Zusammenhangs-Laplace.

Beispiel 1. Sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Wir ergänzen diese Basis durch einen Vektor $\varepsilon_n := tE_n$, der senkrecht auf den anderen steht. Mit Hilfe der dadurch erzeugten Gitter und der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n-1}$ erhalten wir eine Riemannsche Submersion flacher Tori

$$\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^{n-1}.$$

Den Spin-Homomorphismus charakterisieren wir durch

$$\chi(\varepsilon_j) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad j = n.$$

Dann ist π^2/t^2 der kleinste Eigenwert von $D^2 = \nabla^*\nabla$. Da $J \equiv t$ ist, sind der obige Satz und obiges Korollar scharf auf diesen Beispielen. Steht jedoch ε_n nicht mehr senkrecht auf den anderen Vektoren, sind die Abschätzungen nicht mehr scharf.

Beispiel 2. Auch auf $M_k = \Gamma_k \backslash \mathcal{H}_3$ bekommen wir für viele „linksinvariante“ Metriken eine nicht-triviale Abschätzung des kleinsten Eigenwerts. Ist k sogar gerade, dann gibt es zu fast jeder „linksinvarianten“ Metrik eine Spin-Struktur, so daß die Abschätzung nicht-trivial ist. Es ist nicht verwunderlich, daß unsere Abschätzung nicht für alle Metriken und Spin-Strukturen funktioniert. Denn es gibt „linksinvariante“ Metriken auf M_k, die Eigenspinoren zum Eigenwert 0 besitzen [AmB97, 3.2].

Beispiel 3. Mit Hilfe der Hopf-Faserung erhalten wir die Abschätzung

$$\lambda \geq 1/4$$

für den kleinsten Eigenwert von $\nabla^*\nabla$ auf der runden S^n ungerader Dimension. Der kleinste Eigenwert von $\nabla^*\nabla$ ist tatsächlich $n/4$: der kleinste Eigenwert von D^2 ist $n^2/4$ und mit $s = n(n-1)$ folgt dieser kleinste Eigenwert aus der Weitzenböck-Formel (Proposition 2.1.1). Daß unsere Abschätzung genau um den Faktor n zu schlecht ist, liegt vor allem an der Abschätzung (6.1.9). Heuristisch gesehen, haben wir dort die Änderung von Ψ in alle n Richtungen gegen die Änderung in eine Richtung abgeschätzt.

Beweis von Satz 6.1.4. Sei Ψ ein Eigenspinor des Zusammenhangs-Laplace $\nabla^*\nabla$ zum Eigenwert λ. Dann bekommen wir unter Verwendung von (6.1.1)

$$\begin{aligned}\lambda\,(\Psi,\Psi)_M &= (\nabla^*\nabla\Psi,\Psi)_M \\ &= \int_M \pi_\#(\mathrm{dvol}_N)\langle\nabla\Psi,\nabla\Psi\rangle \\ &= \int_N \mathrm{dvol}_N \int_{\pi^{-1}(p)} \frac{\mathrm{dvol}_p}{J(m)}\langle\nabla\Psi,\nabla\Psi\rangle.\end{aligned} \tag{6.1.8}$$

Ebenso können wir auch die linke Seite von (6.1.8) mit (6.1.1) zerlegen:

$$\lambda\,(\Psi,\Psi)_M = \lambda \int_N \mathrm{dvol}_N \int_{\pi^{-1}(p)} \frac{\mathrm{dvol}_p}{J(m)}\langle\Psi,\Psi\rangle.$$

Es gibt nun mindestens ein $p \in N$ mit

$$\begin{aligned}\lambda \int_{\pi^{-1}(p)} \frac{\mathrm{dvol}_p}{J(m)} \langle \Psi, \Psi \rangle &\geq \int_{\pi^{-1}(p)} \frac{\mathrm{dvol}_p}{J(m)} \langle \nabla\Psi, \nabla\Psi \rangle \\ &\geq \int_{\pi^{-1}(p)} \frac{\mathrm{dvol}_p}{J(m)} \langle \nabla_E\Psi, \nabla_E\Psi \rangle \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

für ein Einheitsvektorfeld E längs der Faser $\pi^{-1}(p)$.

Sei nun $c : S^1 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \pi^{-1}(p)$ eine Parametrisierung mit $|\dot{c}| \equiv \ell(p)$. Dann können wir obige Ungleichungen auf S^1 „zurückziehen". Da die Holonomie des Spinorbündels diagonalisierbar ist, zerfällt das zurückgezogene Spinorbündel

$$c^*(\Sigma M) = \bigoplus_{j=1}^{2^q} V(\kappa_j)$$

in komplexe Geradenbündel $V(\kappa_j)$ mit Holonomie $\exp(i\kappa_j)$. Gemäß dieser Zerlegung schreiben wir $c^*\Psi = \sum \psi_j$ und setzen in (6.1.9) ein. Es gibt dann ein j, so daß

$$\lambda \int_{\pi^{-1}(p)} \frac{\mathrm{dvol}_p}{J(m)} \langle \psi_j, \psi_j \rangle \geq \int_{\pi^{-1}(p)} \frac{\mathrm{dvol}_p}{J(m)} \langle \nabla_E\psi_j, \nabla_E\psi_j \rangle. \tag{6.1.10}$$

Wir wollen ab jetzt ψ_j als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ auffassen, die zusätzlich

$$\psi_j(t + 2\pi) = e^{i\kappa_j} \cdot \psi_j(t) \tag{6.1.11}$$

erfüllt.

Ungleichung (6.1.10) übersetzt sich in

$$\lambda \int_0^{2\pi} \frac{\ell(p)dt}{J(c(t))} \langle \psi_j, \psi_j \rangle \geq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\ell(p)J(c(t))} \langle \psi_j', \psi_j' \rangle. \tag{6.1.12}$$

Nach Einsetzen der Fourier-Zerlegung

$$\psi_j(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \exp\left(\left(\frac{\kappa_j}{2\pi} + k\right) t\right).$$

in (6.1.12) erhalten wir

$$\lambda \frac{2\pi\ell(p)}{\min\limits_{\pi^{-1}(p)} J} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \geq \frac{2\pi}{\ell(p) \max\limits_{\pi^{-1}(p)} J} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\kappa_j}{2\pi} + k\right)^2 |a_k|^2$$

und hieraus folgt Abschätzung (6.1.6).

Aus Ungleichung (6.1.12) erhalten wir aber auch die anderen Abschätzungen. Hierzu führen wir vor der Fourier-Zerlegung noch eine Parameter-Transformation durch.

Als erstes wählen wir die Koordinatentransformation $s = \tau(t)$ mit

$$\tau'(t) = \ell(p)/J(c(t)) \text{ und } \tau(0) = 0.$$

Aufgrund von Gleichung (6.1.2) bildet τ das Intervall $[0, 2\pi]$ auf $[0, 1]$ ab. Wir erhalten aus (6.1.12) dann

$$\lambda \int_0^1 ds \langle \psi_j, \psi_j \rangle \geq \int_0^1 \frac{ds}{J(c(t))^2} \langle \psi_j', \psi_j' \rangle. \tag{6.1.13}$$

und nach Fourier-Zerlegung

$$\lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \geq \frac{1}{\max\limits_{\pi^{-1}(p)} J^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\kappa_j(p) + 2\pi k \Big)^2 |a_k|^2.$$

Dies ergibt die Abschätzung (6.1.4) und seine Verallgemeinerung (6.1.5).

Nun wählen wir $s = \tau(t)$ mit $\tau'(t) = \ell(p) J(c(t))$ und $\tau(0) = 0$. Dann bildet τ das Intervall $[0, 2\pi]$ auf $[0, b]$ mit $b = \int_0^{2\pi} \ell(p) J(c(t))\, dt = \int_{\pi^{-1}(p)} J \,\mathrm{dvol}_p$ ab. Aus (6.1.12) erhalten wir

$$\lambda \int_0^b \frac{ds}{J^2} \langle \psi_j, \psi_j \rangle \geq \int_0^b ds\, \langle \psi_j', \psi_j' \rangle. \tag{6.1.14}$$

Die Fourier-Zerlegung ergibt diesmal

$$\lambda \frac{b}{\min\limits_{\pi^{-1}(p)} J^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \geq b \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\kappa_j(p) + 2\pi k}{b} \right)^2 |a_k|^2.$$

Dies liefert Abschätzung (6.1.7). □

Ungleichung (6.1.14) führt noch zu einer anderen Interpretation des Minimierungsproblems. Wir nehmen an, λ_0 sei das kleinstmögliche λ, für das Ungleichung (6.1.14) noch eine Lösung $\psi_j \not\equiv 0$ mit $\psi_j(t + b) = \kappa_j \cdot \psi_j(t)$ hat. Dann ist ψ_j Lösung der Hillschen Differentialgleichung $x''(t) + Q(t)x(t) = 0$ mit $Q(t) = \lambda_0 / J(t)^2$. Diese Differentialgleichung ist physikalisch relevant. Sie beschreibt z. B. auch ein Pendel mit variabler Fadenlänge oder die Perigäumsdrehung des Mondes. Es gibt deswegen eine Reihe von genaueren Analysen der Lösungen dieser Gleichungen. Außer der Originalarbeit von Hill ([Hil1886]) wird die Hillsche Gleichung bereits in [WhW02] behandelt. Eine modernere, gut verständliche und sehr umfassende Behandlung der Gleichung wird im Buch „Hill's Equation" ([MaW66]) von Magnus und Winkler präsentiert. Neuere Ergebnisse findet man in [McM75] und [KoT91] und den darin zitierten Veröffentlichungen.

Trotz der Fülle der Literatur konnte der Autor jedoch leider keine explizite Abschätzung finden, die eine verbesserte Abschätzung von λ_0 und somit von $\lambda \geq \lambda_0$ impliziert.

Beweis von Korollar 6.1.5. O. B. d. A. sei M zusammenhängend. Da das S^1-Bündel $M \to N$ eine Wurzel hat, gibt es nach Proposition 2.6.2 einen Homomorphismus $h : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$, so daß die Verkettung $\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(M) \xrightarrow{h} \mathbb{Z}_2$ surjektiv ist. Sei nun $(P^1_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi_1)$ eine Spin-Struktur auf M. Wir twisten $(P^1_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi_1)$ mit h und erhalten eine zweite Spin-Struktur $(P^2_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi_2)$ auf M.

Man sieht nun leicht, daß

$$\mathrm{Hol}_{\Sigma^1 M}(m) = -\mathrm{Hol}_{\Sigma^2 M}(m).$$

O. B. d. A. sei $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_q$. Dann sind die μ_j stetige Funktionen auf N. Nach Lemma 6.1.1 hat dann $\mathrm{Hol}_{\Sigma^k M}(m)$ die Eigenwerte

$$v_k \exp\Big(i(\pm\mu_1 \pm \ldots \pm \mu_q)\Big),$$

wobei das Vorzeichen $v_1 = -v_2 \in \{-1, +1\}$ nach Zusatz 6.1.2 konstant auf dem zusammenhängenden M ist. Nun folgt das Korollar direkt aus Satz 6.1.4. $\square$

6.2 Differentialformenansatz für den 2-Torus

Wir betrachten nun den Zusammenhangs-Laplace $\nabla^*\nabla$ auf den positiven Spinoren $\Sigma^+\mathbb{T}^2$ über dem 2-dimensionalen Torus $(\mathbb{T}^2, g)$. Dieses Bündel hat die komplexe Dimension 1. Wir nehmen an, daß der Eigenspinor Ψ zum kleinsten Eigenwert λ keine Nullstellen hat. Damit erhalten wir eine Trivialisierung des positiven Spinor-Bündels. In dieser Trivialisierung wird der Zusammenhang auf den positiven Spinoren durch eine komplexe 1-Form ω ausgedrückt, die durch

$$\nabla_X \Psi = \omega(X)\Psi \tag{6.2.1}$$

definiert ist.

Durch das Studium dieser 1-Form werden wir in diesem Abschnitt eine Abschätzung von λ nach unten erhalten, die jedoch leider noch den Term

$$\frac{\min_M |\Psi|}{\|\Psi\|_{L^1}}$$

enthält. Im Falle eines flachen Torus und $|\Psi| = \text{konst}$ ist diese Abschätzung optimal.

Wir führen die folgende abkürzende Schreibweise ein

$$\mathrm{Spur}\,\omega^2 := \omega(e_1)^2 + \omega(e_2)^2$$

für einen lokalen ON-Rahmen e_1, e_2. Den adjungierten Operator zum äußeren Differential d auf Formen bezeichnen wir immer mit δ.

LEMMA 6.2.1. *Sei Ψ ein positiver Spinor auf $\mathbb{T}^2$ ohne Nullstellen und ω durch* (6.2.1) *definiert, dann gilt:*

$$\nabla^*\nabla\Psi = (\delta\omega - \operatorname{Spur}\omega^2)\Psi.$$

Das Lemma ist selbst dann gültig, wenn Ψ kein Eigenspinor ist. Ist aber Ψ Eigenspinor zum Eigenwert λ, so folgt hieraus

$$\delta\omega - \operatorname{Spur}\omega^2 = \lambda. \tag{6.2.2}$$

Beweis von Lemma 6.2.1. Sei e_1, e_2 ein orthonormales Rahmenbündel über $\mathbb{T}^2$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}
\nabla^*\nabla\Psi &= \sum_{i=1}^{2}\Big(-\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\Psi + \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\Psi\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{2}(-\nabla_{e_i}\omega(e_i)\Psi + \omega(\nabla_{e_i}e_i)\Psi) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\Big(-\omega(e_i)^2 - e_i(\omega(e_i)) + \omega(\nabla_{e_i}e_i)\Big)\,\Psi \\
&= \Big(-\operatorname{Spur}\omega^2 + \delta\omega\Big)\,\Psi.
\end{aligned}$$

□

LEMMA 6.2.2. *Sei Ψ ein positiver Spinor auf $\mathbb{T}^2$ ohne Nullstellen und ω durch* (6.2.1) *definiert, dann gilt:*

$$2d\omega = iK\mathrm{dvol}.$$

Hierbei sind K und dvol *Gaußsche Krümmung und Volumenform von $\mathbb{T}^2$.*

Beweis. Die Krümmung des Bündels der positiven Spinoren ist

$$\begin{aligned}
R^{\Sigma^+\mathbb{T}^2}_{X,Y}(\Psi) &:= \Big(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\Big)\,\Psi \\
&= (X\,(\omega(Y)) - Y\,(\omega(X)) - \omega([X,Y]))\,\Psi = d\omega(X,Y)\Psi
\end{aligned}$$

Nach [LaM89, II Theorem 4.15] ist aber andererseits

$$R^{\Sigma^+\mathbb{T}^2}_{X,Y}(\Psi) = (1/2)\langle R_{X,Y}(e_1), e_2\rangle\gamma(e_1)\gamma(e_2)\Psi = (-i/2)\langle R_{X,Y}(e_1), e_2\rangle\Psi$$

für ein positiv orientiertes orthonormales Rahmenbündel (e_1, e_2). Hierbei benutzen wir unsere Vorzeichenkonvention aus Abschnitt 2.1:

$$\gamma(e_1)\gamma(e_2)|_{\Sigma^+} = -i\,\mathrm{id}\,.$$

Diese Konvention stimmt mit[LaM89, I5.12] überein.

Setzen wir nun $X = e_1$ und $Y = e_2$, dann folgt

$$d\omega(e_1, e_2) = \frac{i}{2}K$$

und somit das Lemma. □

Nun wollen wir ω in Real- und Imaginärteil zerlegen. Sei also $\omega = \omega_R + i\omega_I$ mit reellen Formen ω_R und ω_I. Dann ist

$$\omega_R(X)\,|\Psi|^2 = \mathrm{Re}\langle\nabla_X\Psi,\Psi\rangle = (1/2)\,\mathrm{Re}\,(X(\langle\Psi,\Psi\rangle)) = X(|\Psi|)\,|\Psi|.$$

Setzen wir also $f_R := \log|\Psi|$, so ist $\omega_R = df_R$. Der Realteil von ω ist somit exakt.

Nun wollen wir den Imaginärteil von ω untersuchen. Hierzu machen wir eine Hodge-Zerlegung

$$\omega_I = df_I + 2\pi\,\omega_H + \frac{1}{2}\delta(u\,\mathrm{dvol})$$

in das Differential einer reellen Funktion f_I, in eine harmonischen 1-Form ω_H und in das Kodifferential der 2-Form $u\,\mathrm{dvol}$. Die Vorfaktoren 2π und $1/2$ fügen wir ein, damit die Notation analog zu den anderen Teilen dieser Arbeit ist.

Nach Lemma 6.2.2 gilt

$$\Delta u = K.$$

Dieses u ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Nach Gleichung (3.1.1) ist u also gerade die konforme Streckungsfunktion aus Kapitel 3, d. h. $\tilde{g} := e^{-2u}g$ ist eine flache Metrik.

Die Homologieklasse von ω_H steht in enger Beziehung zur Spin-Struktur:

PROPOSITION 6.2.3. *Sei c ein geschlossener Weg in $\mathbb{T}^2$. Und sei χ der Spin-Homomorphismus. Dann gilt*

$$\exp\int_c 2\pi i\,\omega_H(\dot{c}) = \chi([c]),$$

d. h. ω_H ist eine Realisierung von χ als Differentialform.

Beweis. ω_H ist geschlossen und die rechte Seite der Gleichung hängt nur von der Homologieklasse $[c] \in H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})$ ab. Es reicht deswegen, die Aussage für einen Repräsentanten der Homologieklasse zu zeigen. Außerdem reicht es, die Aussage für eine Basis von $H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})$ zu zeigen. Jedes Element solch einer Basis ist aber primitiv. Nach Proposition 3.2.1 wissen wir also, daß es von einer einfach geschlossenen Geodäten repräsentiert wird. Wir können somit o. B. d. A. annehmen, daß c eine einfach geschlossene Geodäte ist und $[c]$ primitiv ist.

Primitive Elemente liegen aber nicht im Kern der Koeffizientenreduktion

$$r : H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z}_2).$$

Deswegen folgt aus Proposition 2.5.3 und der Definition von q_{Arf}, daß $\chi([c]) = 1$ genau dann gilt, wenn $\dot{c}$ bezüglich $\Phi_+ : \Sigma^+\mathbb{T}^2 \to T\mathbb{T}^2$ liftet. In diesem Fall definiert der Lift V von $\dot{c}$ einen parallelen Schnitt von $\Sigma^+\mathbb{T}^2$ längs c. Der Winkel zwischen $\Psi \circ (t)$ und $V(t)$ ist somit

$$\int_0^t \omega_I(\dot{c}) + \text{konst.}$$

Da der Winkel aber nach einem Umlauf bis auf ein Vielfaches von 2π gleich sein muß, gilt

$$\int_{S^1} \omega_I(\dot{c}) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Ähnlich geht man auch im Fall vor, wenn $\chi([c]) = -1$ gilt, d. h. wenn $\dot{c} : S^1 \to TM$ nicht liftet. In diesem Fall liften wir $\dot{c} : \mathbb{R} \to TM$ und erhalten analog

$$\int_{S^1} \omega_I(\dot{c}) \in 2\pi\mathbb{Z} + \pi.$$

Die Aussage der Proposition folgt nun aus dem folgenden Lemma. □

LEMMA 6.2.4. *Der 2-Torus trage eine Riemannsche Metrik $g = e^{2u}\tilde{g}$ mit $\tilde{g}$ flach. Es sei c eine nicht null-homologe, einfach geschlossene Geodäte in $(\mathbb{T}^2, g)$. Dann gilt*

$$\int_c \delta(u\mathrm{dvol}) = -\int_c * \, du = 0$$

Beweis. Das linke Gleichheitszeichen ergibt sich unmittelbar aus $\delta = - * d *$.

Wir liften nun die Metriken g und $\tilde{g}$ und die Streckungsfunktion u auf den Zylinder

$$Z := \mathbb{R}^2/\langle [c] \rangle.$$

$\tilde{c}$ sei ein Lift von c auf Z. Die Funktion $\eta : Z \to \mathbb{R}^+$ sei konstant 1 in einer Umgebung von $\tilde{c}$ und habe kompakten Träger. Wir setzen $\hat{g} := \exp(2u\eta)\tilde{g}$. Nun sei $\bar{c}$ eine zu $\tilde{c}$ homotope Geodätische auf $(Z, \hat{g})$, die außerhalb des Trägers von η verlaufe. Die Kurven $\tilde{c}$ und $\bar{c}$ beranden ein Gebiet G, das homöomorph zu $[0, 1] \times S^1$ ist und somit Euler-Charakteristik 0 hat. Da $\tilde{c}$ und $\bar{c}$ Geodäten bezüglich $\hat{g}$ sind, besagt der Satz von Gauß-Bonnet

$$\int_{\mathbb{T}^2} K_{\hat{g}} = 0.$$

Wir nutzen wieder Gleichung (3.1.1) und erhalten

$$\int_{\mathbb{T}^2} \Delta(u\eta) = 0,$$

und da $u\eta$ in einer Umgebung von $\bar{c}$ verschwindet, ergibt sich mit dem Satz von Gauß

$$\int_{\tilde{c}} * \, du = 0.$$

□

THEOREM 6.2.5. *Sei $(P_{\mathrm{Spin}}(\mathbb{T}^2), \varphi)$ eine nicht-triviale Spin-Struktur auf dem 2-Torus, und sei Ψ ein positiver Eigenspinor von $\nabla^*\nabla$ zum Eigenwert λ. Dann gilt*

$$\lambda \geq \frac{\min |\Psi|}{\|\Psi\|_{L^1}} \left(4\pi^2 d_2^{\mathrm{Spin}}(\varphi, 0)^2 + \frac{(K, u)}{4}\right),$$

wobei u die konforme Streckungsfunktion und K die Gaußsche Krümmung von g bezeichnet.

Da der Krümmungsterm immer positiv ist, können wir hieraus das folgende Korollar ableiten.

KOROLLAR 6.2.6. *Sei $(P_{\mathrm{Spin}}(\mathbb{T}^2), \varphi)$ eine nicht-triviale Spin-Struktur auf dem 2-Torus, und sei Ψ ein positiver Eigenspinor von $\nabla^*\nabla$ zum Eigenwert λ. Dann gilt*

$$\lambda \geq \frac{4\pi^2 \min |\Psi|}{\|\Psi\|_{L^1}} d_2^{\mathrm{Spin}}(\varphi, 0)^2.$$

Diese Abschätzung ist nicht nur formal mit Theorem 4.3.4 verwandt. Betrachten wir beispielsweise den flachen Torus, dann können wir Ψ mit konstanter Länge wählen. Da dann aber die Skalarkrümmung s verschwindet, gilt $D^2 = \nabla^*\nabla$. Im Fall des flachen Torus sind die beiden Abschätzungen somit gleich, und beide Abschätzungen sind im flachen Fall scharf.

Beweis von Satz 6.2.5. O. B. d. A. können wir annehmen, daß Ψ keine Nullstellen besitzt. Die Voraussetzungen für Ansatz (6.2.1) sind somit erfüllt.

Zunächst drücken wir Gleichung (6.2.2) in Termen von f_R, f_I, ω_H und u aus:

$$\Delta f_R - |df_R|^2 + |df_i + 2\pi\,\omega_H + (1/2)\delta(u\,\mathrm{dvol})|^2 = \lambda \tag{6.2.3}$$

$$\Delta f_I - 2\langle df_R, df_I + 2\pi\,\omega_H + (1/2)\delta(u\,\mathrm{dvol})\rangle = 0. \tag{6.2.4}$$

Zur Umformung von (6.2.3) nutzen wir

$$\Delta e^{f_R} = (\Delta f_R)\, e^{f_R} - |df_R|^2 e^{f_R}.$$

und erhalten

$$\Delta e^{f_R} + |df_I + 2\pi\,\omega_H + (1/2)\delta(u\,\mathrm{dvol})|^2 e^{f_R} = \lambda e^{f_R}.$$

Da nun aber $e^{f_R} = |\Psi|$, folgt nach Integration über $\mathbb{T}^2$

$$\int_{\mathbb{T}^2} \lambda\, |\Psi| = \int_{\mathbb{T}^2} |df_I + 2\pi\,\omega_H + (1/2)\delta(u\,\mathrm{dvol})|^2\, |\Psi|.$$

Hieraus ergibt sich sofort die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \frac{\min |\Psi|}{\|\Psi\|_{L^1}} \left(\|2\pi\,\omega_H\|_{L^2}^2 + (1/4)\|du\|_{L^2}^2\right) \\ &\geq \frac{\min |\Psi|}{\|\Psi\|_{L^1}} \left(4\pi^2 d_2^{\mathrm{Spin}}(\varphi, 0)^2 + \frac{(K, u)}{4}\right). \end{aligned} \qquad \square$$

6.3 Abschätzung nach oben

In diesem Abschnitt sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zwei Spin-Strukturen $P^1_{\mathrm{Spin}}(M)$ und $P^2_{\mathrm{Spin}}(M)$. Die zugehörigen Spinorbündel seien $\Sigma_1 M$ und $\Sigma_2 M$, die Dirac-Operatoren D_1 und D_2. Wir wollen eine obere Abschätzung für den „Abstand" der Spektren von D_1 und D_2 finden. In [Fr84] benutzte Friedrich auch ähnliche Methoden, um das Spektrum des flachen Torus zu berechnen.

Die Differenz der beiden Spin-Strukturen ist ein Homomorphismus

$$\chi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}_2) = H^1(M, \mathbb{Z}_2) = H_1(M, \mathbb{Z}_2)^*$$

(siehe Abschnitt 2.4).

Wir bilden nun das Geradenbündel L_χ über M

$$L_\chi := \widetilde{M} \times_\chi \mathbb{C},$$

wobei $\widetilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung ist, und erhalten

$$\Sigma_1 M = \Sigma_2 M \otimes L_\chi \quad \text{und} \quad \Sigma_2 M = \Sigma_1 M \otimes L_\chi$$

im Sinne von (getwisteten) Spinor-Bündeln.

Der folgende Satz zeigt nun, daß die L^∞-Spin-Struktur-Metrik aus Abschnitt 2.4 eine obere Schranke für den „Abstand" der Spektren von D_1 und D_2 bildet.

SATZ 6.3.1. *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) trage zwei Spin-Strukturen $P^1_{\mathrm{Spin}}(M)$ und $P^2_{\mathrm{Spin}}(M)$. Dann kann man die Eigenwerte $(\lambda_{i,j})_{j\in\mathbb{Z}}$ von D_i so numerieren, daß*

$$|\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}| \leq 2\pi\, d^{\mathrm{Spin}}_\infty\Big(P^1_{\mathrm{Spin}}(M), P^2_{\mathrm{Spin}}(M)\Big)$$

für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Falls die Differenz von $P^1_{\mathrm{Spin}}(M)$ und $P^2_{\mathrm{Spin}}(M)$ nicht als Differentialform realisierbar ist, gibt der Satz jedoch leider keine Information über den Abstand der Spektren.

Beweis. Sei f eine Realisierung von χ als Stammfunktion. Dann definiert

$$\begin{aligned} K : \Sigma_1 M &\to \Sigma_1 M \otimes L_\chi = \Sigma_2 M \\ \Sigma_{1p} M \ni \Psi &\mapsto \Psi \otimes f(p) \end{aligned}$$

einen Vektorbündelisomorphismus von $\Sigma_1 M$ nach $\Sigma_2 M$ und sogar einen unitären Isomorphismus von $L^2(\Sigma_1 M)$ nach $L^2(\Sigma_2 M)$. Es gilt also für einen Schnitt Ψ von $\Sigma_1 M$

$$(K^{-1} \circ D_2 \circ K)(\Psi) = D_1 \Psi + \frac{\mathrm{grad} f}{f} \cdot \Psi.$$

Somit sind die Operatoren D_1 und D_2 bis auf den beschränkten Operator $\mathrm{grad} f \cdot$ konjugiert. Nun folgt mit

$$\mathrm{grad} f = 2\pi i f \omega^{\#}$$

der Satz. □

KOROLLAR 6.3.2. *Der 2-Torus $\mathbb{T}^2$ trage eine beliebige Riemannsche Metrik g und eine nicht-triviale Spin-Struktur $(P_{\mathrm{Spin}}(M), \varphi)$. Dann sind die zwei kleinsten Eigenwerte von D^2 kleiner oder gleich*

$$4\pi^2 \, d_\infty^{\mathrm{Spin}}(\varphi, 0)^2.$$

Beweis. (M, g) hat bezüglich der trivialen Spin-Struktur zwei harmonische Spinoren. Hiermit folgt das Korollar aus dem Satz. □

Beispiel 1. Auf den flachen Tori mit nicht-trivialer Spin-Struktur sind die ersten vier Eigenwerte von D^2 gleich $4\pi^2 \, d_\infty^{\mathrm{Spin}}(\varphi, 0)^2$. Die Abschätzung des Korollars ist also scharf für die ersten beiden Eigenwerte.

Beispiel 2. Wir führen Beispiel 2 aus Abschnitt 2.6 fort. Das S^1-Bündel $\pi_{(2k)}$ hat die Wurzel $\pi_{(k)}$. Angenommen wir haben zwei Spin-Strukturen $(P^1_{\mathrm{Spin}}(M_{2k}), \varphi_1)$ und $(P^2_{\mathrm{Spin}}(M_{2k}), \varphi_2)$, die durch Twist mit $\pi_{(k)}$ (Proposition 2.6.3) auseinander hervorgehen. Dann liefert das Korollar keine Abschätzung: die Differenz der Spin-Strukturen ist nicht als Differentialform realisierbar, und deswegen gilt $d_\infty^{\mathrm{Spin}}(\varphi, 0) = \infty$.

Kapitel 7

Kollabierende S^1-Bündel

7.1 Situation

In diesem Kapitel untersuchen wir das asymptotische Verhalten des Dirac-Spektrums, wenn die Länge der Fasern kollabiert.

Mehrere Veröffentlichungen beschäftigen sich bereits mit der Frage, wie sich das Spektrum des Laplace-Operators auf Funktionen verhält. Bei nach oben und unten beschränkter Schnittkrümmung zeigte Fukaya in [Fu87], daß das Spektrum des Laplace-Operators auf Funktionen unter Kollaps konvergiert. Es besteht jedoch wenig Hoffnung, daß sich das Spektrum des Dirac-Operators unter diesen recht allgemeinen Voraussetzungen ähnlich verhält. Wir wollen uns deswegen auf Riemannsche Submersionen mit kollabierenden S^1-Fasern beschränken. Die von uns verwendeten Methoden sind verwandt zu den Methoden von Bérard-Bergery und Bourguignon in [BeB82]. Diese beiden Autoren spalten den Laplace-Operator in einen vertikalen und einen horizontalen Anteil auf. Auf ähnliche Art und Weise wollen wir in diesem Kapitel den Dirac-Operator aufspalten. Im Gegensatz zu Bérard-Bergery und Bourguignon werden wir aber bei einigen Ergebnissen ohne die Voraussetzung auskommen, daß die Fasern total-geodätisch sein sollten. Unsere Ergebnisse gelten sogar für manche kollabierende Familien, deren Krümmung nicht beschränkt ist.

Wir nehmen also an, daß S^1 frei und isometrisch auf der kompakten, zusammenhängenden, $(n+1)$-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, \tilde{g})$ operiert. Wir fassen M^{n+1} als Totalraum eines S^1-Hauptfaserbündels über dem Basisraum $N^n := M^{n+1}/S^1$ auf.

Der Basisraum trage die eindeutig bestimmte Metrik g, so daß

$$\pi : (M, \tilde{g}) \longrightarrow (N, g)$$

eine Riemannsche Submersion ist.

Dieses S^1-Hauptfaserbündel hat eine eindeutige Zusammenhangs-1-Form

$$i\omega : TM \to i\mathbb{R},$$

so daß $\ker \omega|_m$ für alle $m \in M$ bezüglich $\tilde{g}$ senkrecht zu den Fasern steht.

Die S^1-Operation induziert ein Killing-Vektorfeld K. Die Fasern von $M \to N$ sind genau dann geodätisch, wenn $\ell := |\mathsf{K}|$ konstant in $m \in M$ ist. Die Länge einer Faser ist $2\pi\ell$. Die Metrik $\tilde{g}$ auf M wird vollständig durch ω, ℓ und g charakterisiert wird.

Die S^1-Operation auf M induziert eine S^1-Operation auf $P_{\mathrm{SO}}(M)$. Wir nennen eine Spin-Struktur $\tilde{\varphi} : P_{\mathrm{Spin}}(M) \to P_{\mathrm{SO}}(M)$ *projizierbar*, wenn die S^1-Operation auf $P_{\mathrm{SO}}(M)$ auf $P_{\mathrm{Spin}}(M)$ liftet. Ansonsten nennen wir sie *nicht-projizierbar*.

Jede projizierbare Spin-Struktur auf M induziert eine Spin-Struktur auf N wie folgt: Sei $\tilde{\varphi} : P_{\mathrm{Spin}}(M) \to P_{\mathrm{SO}}(M)$ eine projizierbare Spin-Struktur auf M. Wir definieren $P_{\mathrm{SO(n)}}M$ als die Menge aller ON-Rahmen über M, deren erster Vektor K/ℓ ist. Nach Identifikation von $P_{\mathrm{SO}}(N)$ mit $P_{\mathrm{SO(n)}}M/S^1$ ist dann $\tilde{\varphi}^{-1}(P_{\mathrm{SO(n)}}M)/S^1$ ein $\mathrm{Spin}(n)$-Bündel über N, und $\tilde{\varphi}$ definiert eine zugehörige Spin-Struktur über N.

Umgekehrt induziert jede Spin-Struktur auf N eine projizierbare Spin-Struktur auf M mittels Pullback: Sei $\varphi : P_{\mathrm{Spin}}(N) \to P_{\mathrm{SO}}(N)$ eine Spin-Struktur auf N. Dann ist $\pi^*\varphi : \pi^* P_{\mathrm{Spin}}(N) \to \pi^* P_{\mathrm{SO}}(N) =: P_{\mathrm{SO(n)}}M$ eine $\Theta_n : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$-äquivariante Abbildung. Wir vergrößern die Struktur-Gruppe auf $\mathrm{Spin}(n+1)$, d. h. wir definieren mit Hilfe von

$$\tilde{\varphi} := \pi^*\varphi \times_{\Theta_n} \Theta_{n+1} : \pi^* P_{\mathrm{Spin}}(N) \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathrm{Spin}(n+1) \to P_{\mathrm{SO(n)}}M \times_{\mathrm{SO}(n)} \mathrm{SO}(n+1)$$

eine Spin-Struktur auf M.

Projizierbare Spin-Strukturen und projizierbare Spinoren wurden für allgemeine Strukturgruppen bereits von Moroianu [Mo96] untersucht.

Wir betrachten nun eine Familie $(M_t, \tilde{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ derartiger Mannigfaltigkeiten mit entsprechenden π_t, ℓ_t und ω_t über einer gemeinsamen Basismannigfaltigkeit (N, g). Die Faserlängen $2\pi\ell_t$ sollen für $t \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Zu dieser Situation sagen wir: *M_t kollabiert gegen N für $t \to \infty$*. Wir wollen untersuchen, ob ein Teil des Spektrums des Dirac-Operators unter Kollaps konvergiert. Es wird sich dabei herausstellen, daß die Konvergenzeigenschaften stark von den Spin-Strukturen abhängen. Sind die Spin-Strukturen aller M_t projizierbar und induzieren sie dieselbe Spin-Struktur auf N, dann sehen wir im kommenden Abschnitt, daß es bei geeigneten Schranken an ω_t und $\mathrm{grad}\,\ell_t$ konvergierende Eigenwerte gibt. Tragen jedoch alle M_t nicht-projizierbare Spin-Strukturen, dann divergieren alle Eigenwerte des Dirac-Operators gegen $\pm\infty$ (Abschnitt 7.3).

In diesem Kapitel wollen wir wieder die folgende Konvention benutzen: Wenn wir davon sprechen, daß ein Operator die Eigenwerte $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ hat, wollen wir immer annehmen, daß jeder Eigenwert entsprechend seiner Multiplizität wiederholt wird.

7.2 Kollaps bei projizierbarer Spin-Struktur

SATZ 7.2.1. *Sei (N,g) eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit, die ein komplexes Vektorbündel $E\to N$ mit einem metrischen Zusammenhang ∇^E trägt. Die Eigenwerte des getwisteten Dirac-Operators D^E auf $\Sigma N\otimes E\to N$ seien $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Sei $(M_t,\tilde g_t)$ eine Familie Riemannscher Mannigfaltigkeiten, auf denen S^1 frei und isometrisch operiert, und $(M_t,\tilde g_t)\to(N=M_t/S^1,g)$ seien Riemannsche Submersionen. Die Spin-Strukturen auf den M_t seien durch die Spin-Struktur auf N induziert. Wie oben sei $2\pi\ell_t$ die Faserlänge und $i\omega_t$ die Zusammenhangs-1-Form von $M_t\to N$. Außerdem gelte*

$$\begin{gathered}\|\ell_t\cdot d\omega_t\|_\infty\to 0 \textit{ und } \|\ell_t\|_\infty\to 0 \textit{ für } t\to\infty\\ \alpha:=\limsup_{t\to\infty}\|\mathrm{grad}\ell_t\|_\infty<1\end{gathered}\tag{7.2.1}$$

Dann können wir die Eigenwerte $(\lambda_{j,k}(t))_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ des getwisteten Dirac-Operators $\widetilde{D}^t$ auf $\Sigma M_t\otimes\pi_t^*E\to M_t$ so numerieren, daß gilt:

(1) *Für alle $\varepsilon>0$ gibt es ein $t_0\in\mathbb{R}$, so daß für alle $t\ge t_0$ und $j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}-\{0\}$ gilt*

$$\|\ell_t\|_\infty^2\,\lambda_{j,k}(t)^2\ge|k|\,(|k|-\alpha)\;-\;\varepsilon.$$

Unter anderem haben wir also $\lambda_{j,k}(t)^2\to\infty$ für $t\to\infty$.
Falls M_t und ω_t von t unabhängig sind, dann gilt außerdem für alle $j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}-\{0\}$

$$\limsup_{t\to\infty}\Big(\min_{p\in\mathbb{N}}\ell_t(p)\Big)^2\lambda_{j,k}(t)^2\le|k|\,(|k|+\alpha).$$

Diese Schranke nach oben ist aber nicht gleichmäßig in j und k.

(2) *Wenn $n=\dim N$ gerade ist, dann gilt für $t\to\infty$*

$$\lambda_{j,0}(t)\to\mu_j.$$

Hingegen für $n=\dim N$ ungerade erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda_{2j-1,0}(t)&\to\ \ \mu_j\\ \lambda_{2j,0}(t)&\to-\mu_j\end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die Konvergenz der Eigenwerte $\lambda_{j,0}(t)$ gleichmäßig in j.

Bemerkungen

(1) Wenn die S^1-Bündel-Isomorphie-Klasse von M_t nicht von $t \in \mathbb{R}$ abhängt und die Familie (M_t, g_t) glatt in t ist, können die Eigenwerte von $\widetilde{D}^t$ auch stetig in t gewählt werden.

(2) Im Gegensatz zum Fall, daß $\ell_t(p)$ konstant in p ist (Abschnitt 7.4), bekommen wir in Satz 7.2.1 für $k \neq 0$ nur eine Abschätzung an den Betrag der Eigenwerte von $\widetilde{D}^t$, nicht aber für das Vorzeichen der Eigenwerte.

(3) Die Methoden aus Abschnitt 6.1 lassen sich auch auf unsere Situation übertragen, d. h. auf den Fall eines kollabierenden S^1-Hauptfaserbündels mit isometrischer Operation von S^1. Wir erhalten zu Satz 7.2.1 bzw. Satz 7.3.2 analoge Abschätzungen. Dies funktioniert sogar für $\alpha < 2$ (Satz 7.2.1) bzw. $\alpha < 1$ (Satz 7.3.2). Vergleiche hierzu auch die Bemerkung bei Satz 7.3.1.

Im Beweis des Satzes wollen wir der einfachen Darstellung zuliebe annehmen, daß E ein triviales Geradenbündel ist. Für nicht-triviales E muß jedes Spinor-Bündel über N bzw. M_t mit E bzw. $\pi_t^* E$ getwisted werden.

Um Satz 7.2.1 zu zeigen, schreiben wir den Dirac-Operator $\widetilde{D}^t$ als Summe eines „vertikalen Dirac-Operators", eines „horizontalen Dirac-Operators" und eines Terms nullter Ordnung.

Um den vertikalen Dirac-Operator zu definieren, benötigen wir die Lie-Ableitung von Spinoren entlang der S^1-Fasern. Die Operation von S^1 auf $P_{\mathrm{Spin}} M_t$ induziert eine Operation S^1 auf $\Sigma M_t = P_{\mathrm{Spin}}(M_t) \times_{\mathrm{Spin}(n+1)} \Sigma_{n+1}$, die wir κ nennen wollen. Ein Spinor mit Basispunkt m wird unter $\kappa(e^{is})$ auf einen Spinor mit Basispunkt $m \cdot e^{is}$ abgebildet. Wir definieren die *Lie-Ableitung* eines glatten Spinors Ψ in Richtung des Killing-Felds K durch

$$\mathcal{L}_{\mathsf{K}}(\Psi)(m) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \kappa(e^{-is})(\Psi(m \cdot e^{is})).$$

In [BoG92] und [Ko72] werden Lie-Ableitungen von Spinoren in größerer Allgemeinheit diskutiert. Da $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$ das Differential einer Darstellung der Lie-Gruppe S^1 auf $L^2(\Sigma M_t)$ ist, bekommen wir die Zerlegung

$$L^2(\Sigma M_t) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_{k,t}$$

in die Eigenräume $V_{k,t}$ des Operators $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$ zum Eigenwert ik, $k \in \mathbb{Z}$. Diese S^1-Operation kommutiert mit dem Dirac-Operator auf M_t, und deswegen wird diese Zerlegung vom Dirac-Operator erhalten.

Nun wollen wir die Differenz zwischen der kovarianten Ableitung und der Lie-Ableitung in Richtung von K berechnen. Wir benutzen hierbei immer die Konvention, daß die Operation einer r-Form β auf den Spinor Ψ durch

$$\gamma(\beta)\Psi := \sum_{i_1<\ldots<i_r} \beta(e_{i_1},\ldots,e_{i_r})\,\gamma(e_{i_1})\cdots\gamma(e_{i_r})\Psi$$

beschrieben wird, wobei die e_i eine Orthonormalbasis des Tangentialraums bilden.

LEMMA 7.2.2. *Für jeden glatten Schnitt $\tilde{\Psi}$ von ΣM_t gilt*

$$\nabla_{\mathsf{K}}\tilde{\Psi} - \mathcal{L}_{\mathsf{K}}\tilde{\Psi} = \frac{\ell_t^2}{4}\,\gamma(d\omega_t)\tilde{\Psi} - \frac{1}{2}\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)\gamma(\mathrm{grad}\ell_t)\tilde{\Psi}$$

Beweis. Für den Beweis wollen wir einige Notationen festlegen. In diesem Kapitel soll der horizontale Lift von $X \in TN$ immer mit $\tilde{X} \in TM_t$ bezeichnet werden. Sei $(f_1,\ldots,f_n)$ ein lokales ON-Rahmenfeld auf der offenen Teilmenge $U \subset N$, und sei A ein Lift auf die Spin-Struktur. Dann ist $(e_0 := \mathsf{K}/\ell_t, e_1 := \tilde{f}_1\circ\pi_t,\ldots,e_n := \tilde{f}_n\circ\pi_t)$ ein lokales ON-Rahmenfeld auf $\pi_t^{-1}(U)$ mit Lift π_t^*A.

Unter Benutzung der Koszul-Formel können wir die Christoffel-Symbole $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ zu $(e_0,\ldots,e_n)$ berechnen. Wir bekommen Ausdrücke, die die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k zu $(f_1,\ldots,f_n)$, die Krümmungsform $d\omega_t$ des S^1-Bündels und die Länge ℓ_t enthalten. Für $i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k && -\tilde{\Gamma}_{ij}^0 = \tilde{\Gamma}_{i0}^j = \tilde{\Gamma}_{0i}^j = \frac{\ell_t}{2}\,d\omega_t(e_i,e_j) \\ &\tilde{\Gamma}_{i0}^0 = \tilde{\Gamma}_{00}^0 = 0 && \tilde{\Gamma}_{0j}^0 = -\tilde{\Gamma}_{00}^j = f_j(\ell_t)/\ell_t \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Bezüglich der obigen lokalen ON-Rahmenfelder auf M_t und N wenden wir nun Gleichung (2.1.1) für M_t an und erhalten für einen lokalen Schnitt $\tilde{\Psi} = [A,\sigma]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell_t}\nabla_{\mathsf{K}}[A,\sigma] &= \frac{1}{\ell_t}[A,\partial_{\mathsf{K}}\sigma] + \frac{1}{4}\sum_{j,k=0}^{n}\tilde{\Gamma}_{0j}^k\gamma(e_j)\gamma(e_k)[A,\sigma] \\ &= \frac{1}{\ell_t}[A,\partial_{\mathsf{K}}\sigma] + \frac{\ell_t}{8}\sum_{j,k=1}^{n} d\omega_t(e_j,e_k)\gamma(e_j)\gamma(e_k)[A,\sigma] \\ &\quad - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(\ell_t)}{\ell_t}\gamma(e_0)\gamma(e_k)[A,\sigma] + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(\ell_t)}{\ell_t}\gamma(e_j)\gamma(e_0)[A,\sigma] \\ &= \frac{1}{\ell_t}[A,\partial_{\mathsf{K}}\sigma] + \frac{\ell_t}{4}\,\gamma(d\omega_t)[A,\sigma] - \frac{1}{2\ell_t}\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)\gamma(\mathrm{grad}\ell_t)[A,\sigma]. \end{aligned}$$

Aufgrund der Wahl unserer Rahmenbündel gilt aber

$$\mathcal{L}_{\mathsf{K}}[A,\sigma] = [A,\partial_{\mathsf{K}}\sigma],$$

und somit folgt das Lemma. □

Nun assoziieren wir zum S^1-Bündel $\pi_t : M_t \to N$ das komplexe Geradenbündel $L_t := M_t \times_{S^1} \mathbb{C}$, wobei der Zusammenhang durch $i\omega_t$ gegeben ist.

LEMMA-DEFINITION 7.2.3. *Sei n gerade. Zu jedem t gibt es eine Isometrie von Hilberträumen*

$$Q_{k,t} : L^2(\Sigma N \otimes L_t^{-k}) \to V_{k,t}$$

mit folgenden Eigenschaften: Die horizontale kovariante Ableitung ist durch

$$\nabla_{\tilde{X}} Q_{k,t}(\Psi) = Q_{k,t}(\nabla_X \Psi) + \frac{\ell_t}{4}\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)\gamma(\widetilde{W}_X)Q_{k,t}(\Psi) - \frac{X(\ell_t)}{2\ell_t}Q_{k,t}(\Psi)$$

gegeben, wobei W_X das Vektorfeld auf N ist, das $d\omega_t(\tilde{X}, \cdot) = \langle \widetilde{W}_X, \cdot\rangle$ erfüllt. Die Clifford-Multiplikation bleibt erhalten, d. h.

$$Q_{k,t}(\gamma(X)\Psi) = \gamma(\tilde{X})Q_{k,t}(\Psi).$$

Beweis. Da n gerade ist, haben wir $\Sigma_n = \Sigma_{n+1}$. Wir definieren eine Vektorbündelabbildung

$$\begin{aligned} \Pi_k : \Sigma M_t &\to \Sigma N \otimes L_t^{-k} \\ (m, [\pi_t^* A, \sigma]) &\mapsto (\pi_t(m), [A, \sqrt{2\pi\ell_t(\pi_t(m))}\,\sigma] \otimes [m, 1]^{-k}). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $[\pi_t^* A, \sigma]$ (bzw. $[A, \sigma]$, $[m, 1]$) die Äquivalenzklasse von $(\pi_t^* A, \sigma)$ (bzw. (A, σ), $(m, 1)$) in $\pi_t^* P_{\mathrm{Spin}}(N) \times_{\mathrm{Spin}(n)} \Sigma_n = \Sigma M_t$ (bzw. $P_{\mathrm{Spin}}(N) \times_{\mathrm{Spin}(n)} \Sigma_n = \Sigma N$, bzw. $M_t \times_{S^1} \mathbb{C} = L_t$). Diese Bündelabbildung ist faserweise ein Vektorraumisomorphismus, der die Clifford-Multiplikation erhält. Deswegen gibt es für jeden Spinor $\Psi : N \to \Sigma N \otimes L_t^{-k}$ ein eindeutiges $Q_{k,t}(\Psi)$, so daß

$$\begin{tikzcd} M_t \arrow[r, "Q_{k,t}(\Psi)"] \arrow[d, "\pi_t"] & \Sigma M_t \arrow[d, "\Pi_k"] \\ N \arrow[r, "\Psi"] & \Sigma N \otimes L_t^{-k} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus diesem Grund ist $Q_{k,t}$ ein wohldefinierter Homomorphismus von Hilberträumen und die Injektivität folgt aus der Surjektivität von π_t. Aufgrund des Faktors $\sqrt{2\pi\ell_t(\pi_t(m))}$ ist $Q_{k,t}$ zudem eine Isometrie auf sein Bild. Dieses wollen wir nun bestimmen.

Für jeden Schnitt $\tilde\Psi$ von ΣM_t erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\tilde\Psi \in \mathrm{bild}(Q_{k,t})\\
\Longleftrightarrow\;& \Pi_k \circ \tilde\Psi(m) = \Pi_k \circ \tilde\Psi(me^{is}) \quad \forall m \in M_t, e^{is} \in S^1\\
\Longleftrightarrow\;& \tilde\Psi(m) = e^{-iks}\kappa(e^{-is})\tilde\Psi(me^{is}) \;\forall m \in M_t, e^{is} \in S^1\\
\Longleftrightarrow\;& ik\,\tilde\Psi = \mathcal{L}_{\mathsf{K}}\tilde\Psi.
\end{aligned}$$

Deswegen ist das Bild von $Q_{k,t}$ genau $V_{k,t}$.

Schließlich bleibt noch die Formel für die horizontale Ableitung zu zeigen. Wir beweisen es lokal für $X = f_i$, der allgemeine Fall folgt hieraus unmittelbar. Wie zuvor benutzen wir (2.1.1) und (7.2.2).

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tilde f_i} Q_{k,t}(\Psi) &= Q_{k,t}(\nabla_{f_i}\Psi) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\tilde\Gamma_{i0}^{j}\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)\gamma(e_j)Q_{k,t}(\Psi)\\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\tilde\Gamma_{ij}^{0}\gamma(e_j)\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)Q_{k,t}(\Psi) - \frac{f_i(\ell_t)}{2\ell_t}Q_{k,t}(\Psi)\\
&= Q_{k,t}(\nabla_{f_i}\Psi) + \frac{\ell_t}{4}\,\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)\gamma(\widetilde{W}_{f_i})Q_{k,t}(\Psi) - \frac{f_i(\ell_t)}{2\ell_t}Q_{k,t}(\Psi) \qquad \square
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 7.2.1 für gerades n. Wir definieren den *horizontalen Dirac-Operator* als den eindeutig bestimmten abgeschlossenen linearen Operator $D^t_{\mathrm{h}} : L^2(\Sigma M_t) \to L^2(\Sigma M_t)$, der auf jedem $V_{k,t}$ durch

$$D^t_{\mathrm{h}} := Q_{k,t} \circ D^t \circ {Q_{k,t}}^{-1}$$

gegeben ist, wobei D^t hier den (getwisteten) Dirac-Operator auf $\Sigma N \otimes L_t^{-k}$ bezeichnen möge.

Außerdem definieren wir den *vertikalen Dirac-Operator*

$$D^t_{\mathrm{v}} := \gamma(\mathsf{K}/\ell_t)\,\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$$

und einen Term nullter Ordnung

$$Z_t := -(1/4)\,\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)\,\gamma(d\omega_t).$$

Unter Benutzung von Lemma 7.2.2 und Lemma 7.2.3 können wir den Dirac-Operator $\widetilde{D}^t$ als Summe ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^t &= \sum_{i=0}^{n}\gamma(e_i)\nabla_{e_i}\\
&= \frac{1}{\ell_t}D^t_{\mathrm{v}} + D^t_{\mathrm{h}} + \ell_t Z_t.
\end{aligned}$$

Da D^t_{h}, $\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)$ und Z_t mit der S^1-Operation kommutieren, kommutieren sie auch mit deren Differential $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$. Die obige Aufspaltung respektiert also die Zerlegung $L^2(\Sigma M_t) = \bigoplus V_{k,t}$ in die Eigenräume von $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$. Man sieht nun sofort, daß die Eigenwerte von $\widetilde{D}^t|_{V_{0,t}}$ gegen die Eigenwerte von D^t_{h} konvergieren. Hieraus folgt (2).

Wir wollen nun begründen, wieso $\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)$ und D^t_{h} antikommutieren. Hieraus folgt dann auch, daß $D^t_{\mathrm{v}} := \gamma(\mathsf{K}/\ell_t)\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$ und D^t_{h} antikommutieren. Wir wissen, daß

$$\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)Q_{k,t}(\Psi) = Q_{k,t}\Big(c\gamma(\mathrm{dvol}_n)\Psi\Big)$$

mit einem $c \in \{1, i, -1, -i\}$, das von n und der Darstellung von $\mathbb{C}\mathrm{l}_{n+1}$ abhängt. Da $\gamma(\mathrm{dvol}_n)$ mit jedem getwisteten Dirac-Operator auf N antikommutiert, schließen wir daraus, daß $\gamma(\mathsf{K}/\ell_t)$ mit D^t_{h} antikommutiert.

Es gilt nun

$$D^t_{\mathrm{h}}\frac{1}{\ell_t} = \frac{1}{\ell_t}D^t_{\mathrm{h}} + \gamma\Big(\mathrm{grad}\,(1/\ell_t)\Big),$$

und unter Benutzung von $D^t_{\mathrm{v}}D^t_{\mathrm{h}} + D^t_{\mathrm{h}}D^t_{\mathrm{v}} = 0$ erhalten wir

$$D^t_{\mathrm{h}}\left(\frac{1}{\ell_t}D^t_{\mathrm{v}}\right) + \left(\frac{1}{\ell_t}D^t_{\mathrm{v}}\right)D^t_{\mathrm{h}} = \gamma\Big(\mathrm{grad}(1/\ell_t)\Big)D^t_{\mathrm{v}}.$$

Wir nehmen jetzt das Quadrat des Operators $A^t := (1/\ell_t)D^t_{\mathrm{v}} + D^t_{\mathrm{h}}$ und bekommen

$$(A^t)^2 = \frac{1}{\ell_t^2}\left(D^t_{\mathrm{v}}\right)^2 + \left(D^t_{\mathrm{h}}\right)^2 - \frac{\gamma(\mathrm{grad}\,\ell_t)}{\ell_t^2}D^t_{\mathrm{v}}.$$

Nun setzen wir $\alpha_t := \|\mathrm{grad}\,\ell_t\|_\infty$. Für $\tilde{\Psi} \in V_{k,t}$ mit $k \neq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\Big((A^t)^2\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}\Big)_{M_t} &= \left(\left(\frac{k^2}{\ell_t^2} + \left(D^t_{\mathrm{h}}\right)^2 - ik\frac{\gamma(\mathrm{grad}\,\ell_t)\gamma(e_0)}{\ell_t^2}\right)\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}\right)_{M_t} \\
&\geq \int_{M_t}\left(\frac{k^2}{\ell_t^2} - \frac{\alpha_t\,|k|}{\ell_t^2}\right)|\tilde{\Psi}|^2 \\
&\geq \frac{|k|(|k| - \alpha_t)}{\|\ell_t\|_\infty^2}\Big(\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}\Big)_{M_t}.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $(A^t)^2|_{V_{k,t}}$ sind also größer gleich $\Big(|k|\,(|k| - \alpha_t)\Big)/\|\ell_t\|_\infty^2$. Da $\ell_t \cdot d\omega_t$ ein beschränkter Operator ist, dessen Norm für $t \to \infty$ verschwindet, verschwindet im Limes auch der Term nullter Ordnung. Somit folgt der erste Teil von Aussage (1).

Seien nun M_t und ω_t unabhängig von t. Dann sind auch L_t und D^t unabhängig von t. Wir schätzen in die andere Richtung ab und erhalten analog

$$\Big((A^t)^2Q_{k,t}(\Psi), Q_{k,t}(\Psi)\Big)_{M_t} \leq \Big(\left(D^t_{\mathrm{h}}\right)^2 Q_{k,t}(\Psi), Q_{k,t}(\Psi)\Big)_{M_t}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{|k|(|k|+\alpha)}{\left(\min_{p\in N} \ell_t(p)\right)^2} \left(Q_{k,t}(\Psi), Q_{k,t}(\Psi)\right)_{M_t} \\
&= \left((D^t)^2\,\Psi, \Psi\right)_N \\
&+ \frac{|k|(|k|+\alpha)}{\left(\min_{p\in N} \ell_t(p)\right)^2} \left(Q_{k,t}(\Psi), Q_{k,t}(\Psi)\right)_{M_t}
\end{aligned}
$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\left(\min_{p\in N} \ell_t(p)\right)^2$, dann wird für einen gegebenen Spinor Ψ der erste Summand der rechten Seite im Limes $t \to \infty$ klein. Also bekommen wir die zweite Ungleichung. □

Beweis von Satz 7.2.1 für ungerades n. Im Fall „n ungerade“ ist der Beweis ganz ähnlich, aber wir müssen einige Modifikationen vornehmen, da nicht mehr die Gleichheit $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n$ besteht.

Für die Standardbasis $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{R}^n$ und $E_0, \dots, E_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir das *Volumenelement* durch

$$\nu_n := i^{\frac{n+1}{2}} \gamma(E_1) \cdots \gamma(E_n) \in \mathbb{C}\mathrm{l}(n+1).$$

Das Quadrat ist die Identität und hat deswegen die Eigenwerte ± 1. Sei

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n^{(+)} \oplus \Sigma_n^{(-)}$$

die Zerlegung in die Eigenräume. Diese $\Sigma_n^{(\pm)}$ sind die beiden irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$. Die Clifford-Multiplikation $\gamma(E_0)$ antikommutiert mit ν_n und liefert deswegen einen Isomorphismus von $\Sigma_n^{(+)}$ nach $\Sigma_n^{(-)}$. Dieser Isomorphismus ändert das Vorzeichen von $\gamma(E_i)$ für $i > 0$ da $\gamma(E_0)\gamma(E_i) = -\gamma(E_i)\gamma(E_0)$.

Die zugehörigen Spinor-Bündel nennen wir nun $\Sigma^{(\pm)}N$. Lemma 7.2.3 ist nun gültig mit

$$Q_{k,t} : L^2\Big((\Sigma^{(+)}N \oplus \Sigma^{(-)}N) \otimes L^{-k}\Big) \to V_{k,t}.$$

Mit denselben Argumenten wie im gerade-dimensionalen Fall können wir zeigen, daß im Fall $k \neq 0$ die Eigenwerte von $\widetilde{D^\ell}|_{V_{k,t}}$ gegen $\pm\infty$ konvergieren und die entsprechenden Abschätzungen erfüllen. Und für $k = 0$ konvergieren sie gegen die Eigenwerte von D^t_{h}, die mit den Eigenwerten des Dirac-Operators auf $\Sigma^{(+)}N \oplus \Sigma^{(-)}N$ übereinstimmen. Die Zahl λ ist genau dann Eigenwert des Dirac-Operators auf $\Sigma^{(+)}N$, wenn $-\lambda$ ein Eigenwert des Dirac-Operators auf $\Sigma^{(-)}N$ ist. Dies vervollständigt den Beweis von Satz 7.2.1. □

7.3 Kollaps bei nicht-projizierbarer Spin-Struktur

Im Falle einer nicht-projizierbaren Spin-Struktur bekommen wir ein ähnliches Resultat mit einer stärkeren Einschränkung an α. Die Variable k aus dem Beweis nimmt aber keine ganz-zahligen Werte an, sondern

$$k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\,.$$

Es werden deswegen alle Eigenwerte divergieren.

Aus der Tatsache, daß $\tilde{\varphi} : P_{\mathrm{Spin}}(M) \to P_{\mathrm{SO}}(M)$ eine nicht-projizierbare Spin-Struktur auf M ist, können wir weder schließen, daß N spin ist, noch daß N nicht spin ist. Tatsächlich ist in diesem Fall N genau dann spin, wenn $M \to N$ eine Wurzel im Sinne von S^1-Bündeln hat. Denn ist N spin, dann existiert auf M eine projizierbare Spin-Struktur $\tilde{\varphi}_2$. Die Differenz von $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\varphi}_2$ ist ein Homomorphismus $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$, der die Voraussetzungen von Proposition 2.6.2 erfüllt. Haben wir umgekehrt einen Homomorphismus $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ wie in Proposition 2.6.2, dann können wir $\tilde{\varphi}$ damit twisten und erhalten eine projizierbare Spin-Struktur auf M und somit eine Spin-Struktur auf N.

Beispiel 1. Das Bündel $N \times S^1 \to N$ mit N spin besitzt eine Wurzel, deswegen hat $N \times S^1$ mindestens eine projizierbare und eine nicht-projizierbare Spin-Struktur.

Beispiel 2. Das Bündel $M_{2k} = \Gamma_{2k} \backslash \mathcal{H}_3 \to \mathbb{T}^2$ besitzt ebenfalls eine Wurzel, der Totalraum M_{2k} hat 4 projizierbare und 4 nicht-projizierbare Spin-Strukturen.

Beispiel 3. Betrachten wir die Hopf-Faserung $h_q : S^{2q+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^q$. Die Spin-Struktur auf S^{2q+1} ist eindeutig — das Bündel hat keine Wurzel. Diese Spin-Struktur ist somit genau dann projizierbar, wenn $\mathbb{C}\mathrm{P}^q$ spin ist, also wenn q ungerade ist.

Bevor wir einen Satz über das Spektrum bei Kollaps aufstellen, wollen wir einen verwandten Satz formulieren, der eine Abschätzung des kleinsten Eigenwerts von D^2 für ein festes S^1-Bündel mit kurzer Faser ergibt. Die *Clifford-Norm* $\|\eta\|_{\mathrm{Cl}}$ einer 2-Form η auf M definieren wir als die Operator-Norm von $\gamma(\eta) \in \mathrm{End}(\Gamma\Sigma M)$.

SATZ 7.3.1. *Sei $(M, \tilde{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, auf der S^1 frei und isometrisch operiert. Die Spin-Struktur auf M sei nicht projizierbar. Der Quotient $N := M/S^1$ trage die Metrik g, für die $M \to N$ eine Riemannsche Submersion ist. Sei $E \to N$ ein komplexes Geradenbündel über N, und sei ∇^E ein metrischer Zusammenhang auf E. Außerdem sei $\|\mathrm{grad}\,\ell\|_\infty < 1/2$.*

Dann erfüllen alle Eigenwerte $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ des getwisteten Dirac-Operators $\widetilde{D}$ auf $\Sigma M \otimes$

$\pi_t^* E \to M$ die Abschätzung

$$|\lambda_i| \geq \frac{\sqrt{1 - 2\,\|\mathrm{grad}\,\ell\|_\infty}}{2\|\ell\|_\infty} - \frac{\|\ell\, d\omega\|_{\mathbb{C}}}{4}.$$

Bemerkung. Dieser Satz liefert nur eine Abschätzung, falls $\|\mathrm{grad}\,\ell\|_\infty < 1/2$. Bei kleinem $\|\ell\, d\omega\|_\infty$ ist dies äquivalent dazu, daß die Eigenwerte von $\mathrm{Hol}_{\Sigma M}$ — das ist der Paralleltransport von ΣM längs der Fasern — die Form $\exp i\kappa_j$ mit $(\pi/2) - \varepsilon < |\kappa_j| \leq \pi$ mit einem kleinen ε haben. Im Gegensatz dazu liefert Satz 6.1.4 eine Abschätzung des kleinsten Eigenwerts von $\nabla^*\nabla$, wenn $0 < \min|\kappa_j| \leq \pi$; dies würde einer Voraussetzung $\|\mathrm{grad}\,\ell\|_\infty < 1$ entsprechen. Ist also z. B. die Skalarkrümmung beschränkt und sind die Fasern kurz, dann gibt uns Satz 6.1.4 zusammen mit der Weitzenböck-Formel (Proposition 2.1.1) eine bessere Abschätzung mit schwächeren Voraussetzungen.

SATZ 7.3.2. *Sei $(M_t, \tilde{g}_t)$ eine Familie von S^1-Bündeln über (N, g), die die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes für ein festes g erfüllen. Außerdem gelte noch*

$$\begin{gathered} \|\ell_t \cdot d\omega_t\|_\infty \to 0 \text{ und } \|\ell_t\|_\infty \to 0 \text{ für } t \to \infty \\ \alpha := \limsup_{t\to\infty} \|\mathrm{grad}\,\ell_t\|_\infty < 1/2 \end{gathered} \tag{7.3.1}$$

Dann divergieren alle Eigenwerte des getwisteten Dirac-Operators $\widetilde{D}^t$ auf $\Sigma M_t \otimes \pi_t^* E \to M_t$. Wir können seine Eigenwerte $(\lambda_{j,k}(t))_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}+(1/2)}$ sogar so numerieren, daß gilt:

(a) *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $t \geq t_0$ und $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} + (1/2)$ gilt*

$$\|\ell_t\|_\infty^2\, \lambda_{j,k}(t)^2 \geq |k|\,(|k| - \alpha) - \varepsilon.$$

(b) *Falls M_t und ω_t unabhängig von t sind, dann gilt außerdem für alle $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} + (1/2)$*

$$\limsup_{t\to\infty} \left[\Big(\min_{p\in\mathbb{N}} \ell_t(p) \Big)^2 \lambda_{j,k}(t)^2 \right] \leq |k|\,(|k| + \alpha).$$

Diese Schranke nach oben ist aber nicht gleichmäßig in j und k.

Beweis der beiden Sätze. Dieser Beweis ist eine Variation des Beweises von Satz 7.2.1. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß $n = \dim N$ gerade ist und E trivial ist. Die anderen Fälle gehen analog.

Wie im projizierbaren Fall kann das $\mathrm{SO}(n+1)$-Hauptfaserbündel $P_{\mathrm{SO}}(M)$ zu einem $\mathrm{SO}(n)$-Hauptfaserbündel $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ eingeschränkt werden. Weiterhin ist $P := \tilde{\varphi}^{-1}(P_{\mathrm{SO}(n)}(M))$ ein $\mathrm{Spin}(n)$-Hauptfaserbündel über M.

Die Operation von $S^1 \cong (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ liftet nicht auf P, dafür aber operiert die zweifache Überlagerung von S^1, also $S^1 \cong (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z})$, auf P. Wir definieren $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ als $\mathrm{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ wobei $-1 \in \mathbb{Z}_2$ das Paar $(-A, c)$ mit $(A, -c)$ identifiziert. Die Lie-Gruppe $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ operiert natürlich auf Σ_n. Die Operationen von $\mathrm{Spin}(n)$ und S^1 auf P induzieren eine freie Rechtsoperation von $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ auf P, und deswegen können wir P als $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$-Hauptfaserbündel über N betrachten. Nun bilden wir das Bündel $P \times_{\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)} \Sigma_n$.

Wenn N spin ist, ist dieses Bündel gerade $\Sigma N \otimes L^{\frac{1}{2}}$. Wenn aber N nicht spin ist, existiert weder ΣN noch $L^{\frac{1}{2}}$. Damit dieser Beweis dennoch formal analog zu Beweis von Satz 7.2.1 bleibt, schreiben wir formal

$$\Sigma N \otimes L^{k+\frac{1}{2}} := P \times_{\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)} \Sigma_n \otimes L^k.$$

Wiederum zerfällt

$$L^2(\Sigma M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} V_k$$

in Eigenräume V_k von $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$ zu den Eigenwerten ik.

Nun führen wir eine Zerlegung

$$\widetilde{D} = (1/\ell) D_{\mathrm{v}} + D_{\mathrm{h}} + \ell Z$$

analog zum Fall $k \neq 0$ im Beweis von Satz 7.2.1 durch. Hieraus folgt Satz 7.3.1, da die Operator-Norm von ℓZ gerade gleich $\|d\omega\|_{\mathbb{C}l}/4$ ist.

Um Satz 7.3.2 zu beweisen, definieren wir die $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-Struktur P_t für jedes M_t wie oben. Um Aussage (a) zu zeigen, kann man völlig analog wie in Fall $k \neq 0$ des Beweises von Satz 7.2.1 vorgehen. Für Aussage (b) beachte man, daß wir noch keine Voraussetzung gemacht haben, welche nicht-projizierbare Spin-Struktur M_t tragen soll. Deswegen hängt P_t a priori von t ab. Da aber ω_t und M_t konstant in t sind, gehören alle $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-Strukturen P_t zum selben „Geradenbündel" $L_t^{1/2}$. Die Anzahl derartiger $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-Strukturen ist aber $\#H_1(N, \mathbb{Z}_2) < \infty$. Deswegen können wir o. B. d. A. annehmen, daß die P_t für alle t isomorph sind. Somit sind auch die $\Sigma N \otimes L_t^{k+\frac{1}{2}}$ für alle t isomorph. Aus diesem Grund können wir ebenfalls wie im Beweis von Satz 7.2.1 argumentieren. □

7.4 Kollaps bei konstanter Faserlänge

Wir betrachten nun den Spezialfall, daß die Faserlänge ℓ_t eine glatte Funktion in t ist, also auch unabhängig vom Basispunkt aus N ist. Außerdem wollen wir annehmen, daß $M_t = M_0$ nicht von t abhängt. Aus diesen Voraussetzungen folgt auch, daß sich g_t glatt in t ändert.

In diesem Fall können wir die Aussagen der Sätze 7.2.1 und 7.3.2 noch etwas verstärken. Auf einen Beweis soll hier verzichtet werden, da die Beweismethoden nur geringfügig abgeändert werden müssen. Einen vollständigen Beweis für diesen Fall findet man in [AmB97].

SATZ 7.4.1. *Sei $M_0 \to N$ ein S^1-Prinzipalbündel über der geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit N. Der Totalraum M_0 trage eine Familie von Riemannschen Metriken $(\tilde{g}_t)_t$ mit den Eigenschaften*

(1) *$(M_0, \tilde{g}_t) \to (N, g)$ ist eine Familie von Riemannschen Submersionen,*

(2) *die Operation von S^1 ist isometrisch und frei,*

(3) *die Länge der Fasern $2\pi\ell_t$ ist konstant auf N, glatt in t und geht gegen 0 für $t \to \infty$,*

(4) *die zugehörige Zusammenhangs-1-Form ω_t ist unabhängig von t.*

Sei $E \to N$ ein komplexes Vektorraumbündel mit metrischem Zusammenhang ∇^E. Die Spin-Struktur auf M_0 sei projizierbar und N trage die induzierte Spin-Struktur.

Wir bezeichnen die Eigenwerte des getwisteten Dirac-Operators D^E auf $\Sigma N \otimes E \to N$ mit $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Dann können wir die Eigenwerte $(\lambda_{j,k}(t))_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ des getwisteten Dirac-Operators $\widetilde{D}^t$ bezüglich $\tilde{g}_t$ auf $\Sigma M_0 \otimes \pi_t^* E \to M_0$ so numerieren, daß sie stetig von t abhängen und so daß für $t \to \infty$:

(1) *Für jedes $j \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$*
$$\ell_t \cdot \lambda_{j,k}(t) \to k.$$
Insbesondere, $\lambda_{j,k}(t) \to \pm\infty$ wenn $k \neq 0$.

(2) *Wenn $n = \dim N$ gerade ist, dann*
$$\lambda_{j,0}(t) \to \mu_j.$$
Andrerseits, wenn $n = \dim N$ ungerade ist, dann gilt
$$\begin{aligned} \lambda_{2j-1,0}(t) &\to \mu_j \\ \lambda_{2j,0}(t) &\to -\mu_j \end{aligned}$$
In beiden Fällen ist die Konvergenz der Eigenwerte $\lambda_{j,0}(t)$ gleichmäßig in j.

SATZ 7.4.2. *Sei $M_0 \to N$ ein S^1-Prinzipalbündel über der geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit N. Der Totalraum M_0 trage eine Familie von Riemannschen Metriken $(\tilde{g}_t)_t$ mit den Eigenschaften*

(1) *$(M_0, \tilde{g}_t) \to (N, g)$ ist eine Familie von Riemannschen Submersionen,*

(2) *die Operation von S^1 ist isometrisch und frei,*

(3) *die Länge der Fasern $2\pi\ell_t$ ist konstant auf N, glatt in t und geht gegen 0 für $t \to \infty$,*

(4) *die zugehörige Zusammenhangs-1-Form ω_t ist unabhängig von t.*

Sei $E \to N$ ein komplexes Vektorraumbündel mit metrischem Zusammenhang ∇^E. Die Spin-Struktur auf M_0 sei **nicht***-projizierbar und die Spin-Strukturen auf (M_0, g_t) seien äquivalent im Sinne von Definition 2.3.1.*

Dann können wir die Eigenwerte $(\lambda_{j,k}(t))_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}+(1/2)}$ des getwisteten Dirac-Operators $\widetilde{D}^t$ bezüglich $\tilde{g}_t$ auf $\Sigma M_0 \otimes \pi_t^* E \to M_0$ so numerieren, daß sie stetig in t sind und so daß für $t \to \infty$ gilt

$$\ell_t \cdot \lambda_{j,k}(t) \to k \quad \forall j = 1, 2, \ldots .$$

Insbesondere haben wir $\lambda_{j,k}(t) \to \pm\infty$.

C. Bär wendete diesen Satz an, um die Eigenwerte von $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$ mit Multiplizitäten zu berechnen. Zuvor waren nur die Eigenwerte ohne die Multiplizitäten bekannt. Wir betrachten hierfür den Kollaps der Hopf-Faserung $S^{2m+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ bei konstanter (d. h. von $p \in N$ unabhängiger) Faserlänge. Das Spektrum des Dirac-Operators auf den zugehörigen $\tilde{g}_t$ hatte Bär bereits in [Bä96, Theorem 3.1] berechnet. Wir erhalten

THEOREM 7.4.3 (Bär [AmB97, Theorem 4.6]). *Der klassische Dirac-Operator auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$, m ungerade, hat die Eigenwerte*

$$\pm 2\sqrt{\left(a_1 + \frac{m+1}{2}\right)\left(a_2 + \frac{m+1}{2}\right)}$$

wobei $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0, |a_1 - a_2| \leq \frac{m-1}{2}$ mit Multiplizität

$$\frac{(a_1+m)!\,(a_2+m)!\,(a_1+a_2+m+1)}{a_1!\,a_2!\left(a_1+\frac{m+1}{2}\right)\left(a_2+\frac{m+1}{2}\right)m!\left(a_1-a_2+\frac{m-1}{2}\right)!\,\left(a_2-a_1+\frac{m-1}{2}\right)!}.$$

Kapitel 8

Isospektrale Deformationen

In diesem Kapitel wollen wir studieren, wie stark man eine Riemannsche Mannigfaltigkeit verändern kann, ohne daß sich das Spektrum des Dirac-Operators ändert. Einige Größen der Riemannschen Geometrie können aus dem Spektrum herausgelesen werden, z. B. die Dimension der Mannigfaltigkeit und ihr Volumen. Ändern wir also die Dimension oder das Volumen, dann ist klar, daß sich auch das Spektrum ändern wird.

Ähnliche Betrachtungen wurden bereits intensiv für andere Spektren angestellt: das Spektrum des Laplace-Operators auf Funktionen, das Spektrum des Laplace-Operators auf Formen, das Längenspektrum und das markierte Längenspektrum. Für uns ist das *Längenspektrum* einfach die Menge aller Längen von geschlossenen Geodäten. Das *markierte Längenspektrum* ist für uns eine Abbildung, die jeder freien Homotopieklasse $[c]_{\mathrm{frei}}$ die Menge

$$\left\{\text{Länge}(c') \;\middle|\; c' \text{ geschlossene Geodäte, } c' \in [c]_{\mathrm{frei}}\right\} \subset \mathbb{R}$$

zuordnet. Der Leser beachte aber, daß in der Literatur teilweise auch andere Definitionen üblich sind.

Um die Fragestellung anzugehen, wollen wir einige allgemeine darstellungstheoretische Methoden auf den Dirac-Operator übertragen, mit Hilfe derer wir Isospektralität nachweisen oder widerlegen können, und hiermit einige Beispiele diskutieren.

Die Beispiele, die wir betrachten, sind *Riemannsche Nilmannigfaltigkeiten*, das sind kompakte Quotienten $\Gamma\backslash G$ einer einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppe G zusammen mit einer Metrik, deren Lift auf G linksinvariant ist. Beispiele sind Tori oder die Heisenberg-Mannigfaltigkeiten (Beispiel 2 aus Abschnitt 2.6).

Viele in der Literatur vorgestellte Beispiele Laplace- und Längen-isospektraler Mannigfaltigkeiten sind Nilmannigfaltigkeiten. Milnor gab in [Mi64] das erste Beispiel eines Paares von Riemannschen Mannigfaltigkeiten an, die nicht isometrisch sind, aber dennoch dasselbe Spektrum des Laplace-Operators auf Funktionen haben. Dies waren 16-dimensionale Tori.

Gordon und Wilson [GoW84] konstruierten eine stetige Familie von nicht-isometrischen Riemannschen 2-stufigen Nilmannigfaltigkeiten, die konstantes Laplace-Spektrum für Funktionen und Formen haben. Es waren die ersten Beispiele einer nichttrivialen Laplace-isospektralen Deformation. Diese Familie und andere Deformationen vom Gordon-Wilson-Typ, d. h. Deformationen mittels fast innerer Automorphismen, haben auch konstantes markiertes Längenspektrum.

Für 2-stufige Riemannsche Nilmannigfaltigkeiten konnte andererseits Patrick Eberlein [Eb94, Theorem 5.20] zeigen, daß zwei Mannigfaltigkeiten mit demselben markierten Längenspektrum durch fast innere Automorphismen auseinander hervorgehen; sie haben somit auch das gleiche Laplace-Spektrum.

Es stellte sich deswegen die Frage, ob die Isospektralität des markierten Längenspektrums immer auch Isospektralität des Laplace-Operators auf Funktionen und Formen impliziert.

Daß diese Vermutung falsch ist, zeigte Gornet, indem sie die darstellungstheoretischen Methoden von Gordon und Wilson weiter ausbaute und auf die kompliziertere Klasse der 3-stufigen Nilmannigfaltigkeiten anwendete. Gornet [Go97] konstruierte zwei Familien von Deformationen von 3-stufigen Riemannschen Nilmannigfaltigkeiten, die isospektral für den Laplace-Operator auf Funktionen und für das markierte Längenspektrum sind, die aber nicht isospektral für den Laplace-Operator auf 1-Formen sind.

Wir werden jetzt viele der angesprochenen Beispiele auf Dirac-Isospektralität hin untersuchen. Das Spektrum des Dirac-Operators wird sich teilweise wie die obigen Spektren verhalten, besitzt aber einige neue Phänomene. Unter anderem hängt das Spektrum von dem Spin-Homomorphismus $\chi : \Gamma \to \{-1, 1\}$ ab. Als Beispiel hierfür betrachten wir einen 2-Torus. Dessen Dirac-Spektrum enthält genau dann die Null, wenn die Spin-Struktur trivial ist. Ein weiteres Beispiel sind die oben angesprochenen Gornetschen Deformationen. Diese Familien sind einerseits Dirac-isospektral für „nicht-projizierbare“ Spin-Strukturen, aber andererseits nicht Dirac-isospektral für „projizierbare“ Spin-Strukturen.

Wir werden in diesem Kapitel einige Resultate aus der Kirillov-Theorie benötigen, das ist die Theorie unitärer Darstellungen von nilpotenten Lie-Gruppen. Eine gut ausgearbeitete und ausführliche Darstellung der Kirillov-Theorie findet man in [CoG90], eine kompaktere in [Ki62].

Sei $L^2_\chi(\Gamma\backslash G)$ der Raum aller komplex-wertigen quadrat-integrierbaren Funktionen auf G, die die χ-Äquivarianzbedingung

$$f(g_0 g) = \chi(g_0) f(g) \quad \text{für alle } g_0 \in \Gamma \text{ und } g \in G$$

erfüllen. Die nilpotente Lie-Gruppe G operiert hierauf vermöge der rechtsregulären Darstellung

$$\begin{aligned} R : G &\to \operatorname{End}(L^2_\chi(\Gamma\backslash G)) \\ g_0 &\mapsto \Big(R(g_0) : f \mapsto f(\,\cdot\, g_0)\Big). \end{aligned}$$

Sei nun Γ' eine weitere kokompakte diskrete Untergruppe von G und $\chi' : \Gamma' \to \{-1, 1\}$ ein Homomorphismus. Wir nennen (Γ, χ) und (Γ', χ') *darstellungsäquivalent*, wenn die rechtsregulären Darstellungen auf $L^2_\chi(\Gamma\backslash G)$ und auf $L^2_{\chi'}(\Gamma'\backslash G)$ isomorph im Sinne von G-Darstellungen sind.

Schnitte des Spinorbündels $\Sigma_\chi(\Gamma\backslash G)$ können mit χ-äquivarianten Abbildungen $G \to \Sigma_n$ identifiziert werden. Wir werden Elemente von Σ_n auch mit konstanten Abbildungen $G \to \Sigma_n$ identifizieren und dadurch auch mit Schnitten von ΣG.

Deswegen definiert $f \otimes s \mapsto f \cdot s$ einen Isomorphismus von Hilberträumen $L^2_\chi(\Gamma\backslash G) \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma_n \to L^2(\Sigma_\chi(\Gamma\backslash G))$. Wir wollen in diesem Kapitel mittels dieses Isomorphismus identifizieren. Die Clifford-Multiplikation wirkt auf den zweiten Faktor:

$$\gamma(X)(f \otimes s) = f \otimes (\gamma(X)s)$$

für alle $X \in \mathfrak{g}, f \in L^2_\chi(\Gamma\backslash G), s \in \Sigma_n$.

Satz 8.1. *Wenn (Γ, χ) und (Γ', χ') darstellungsäquivalent sind, dann haben die zugehörigen Dirac-Operatoren dasselbe Spektrum für jede linksinvariante Riemannsche Metrik auf G.*

Beispiele.

(1) Milnors 16-dimensionale Tori [Mi64] sind für $\chi \equiv \chi' \equiv 1$ darstellungsäquivalent.

(2) Die Gordon-Wilson-Deformationen [GoW84] erhalten das Spektrum des Dirac-Operators. Wenn nämlich Ψ_t eine Familie von fast-inneren Automorphismen von G ist, Γ eine kokompakte diskrete Untergruppe ist und $\chi : \Gamma \to \{-1, 1\}$ ein Homomorphismus ist, dann sind $\Big(\Psi_t(\Gamma), \chi \circ {\Psi_t}^{-1}\Big)$ paarweise darstellungsäquivalent. Diese Deformation erhält alle oben genannten Spektralinvarianten einschließlich des Dirac-Spektrums für jede Spin-Struktur.

Da das Spektrum des Dirac-Operators das Volumen bestimmt, bekommen wir das

Korollar 8.2. *Wenn (Γ, χ) und (Γ', χ') darstellungsäquivalent sind, dann haben $\Gamma\backslash G$ und $\Gamma'\backslash G$ dasselbe Volumen für jede linksinvariante Volumenform auf G.*

Beweis von Satz 8.1. Weil $L^2_\chi(\Gamma\backslash G)$ und $L^2_{\chi'}(\Gamma'\backslash G)$ isomorph als Darstellungen der Lie-Gruppe G sind, sind sie auch isomorph als Darstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei

$$\vartheta : L^2_\chi(\Gamma\backslash G) \to L^2_{\chi'}(\Gamma'\backslash G)$$

solch ein Isomorphismus, also $\vartheta \circ R(g) = R'(g) \circ \vartheta$ und $\vartheta \circ R_*(X) = R'_*(X) \circ \vartheta$ für alle $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$. Um den Satz zu beweisen, zeigen wir daß $\vartheta \otimes \mathrm{id}$ Eigenspinoren des Dirac-Operators in $L^2(\Sigma_\chi(\Gamma\backslash G))$ auf Eigenspinoren des Dirac-Operators in $L^2(\Sigma_{\chi'}(\Gamma'\backslash G))$ abbildet. Man beachte, daß diese beiden Dirac-Operatoren einfach der Dirac-Operator auf ΣG eingeschränkt auf χ- (bzw. χ'-)äquivariante Spinoren sind.

Sei also $s = \sum_i f_i s_i$ ein beliebiger Eigenspinor in $L^2(\Sigma_\chi(\Gamma\backslash G))$ zum Eigenwert λ mit $f_i \in L^2_\chi(\Gamma\backslash G)$ und $s_i \in \Sigma_n$. Sei $E_1, \ldots, E_n$ ein Orthonormalbasis von $\mathfrak{g}$. Mit Hilfe der Leibniz-Regel

$$\nabla_{E_j}(f_i s_i) = \partial_{E_j}(f_i)\, s_i + f_i \nabla_{E_j} s_i = (R_*(E_j) f_i)\, s_i + f_i \nabla_{E_j} s_i \tag{8.0.1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda(\vartheta \otimes \mathrm{id})(s) &= (\vartheta \otimes \mathrm{id})(Ds) \\
&= \sum_{ij} (\vartheta \otimes \mathrm{id}) \Big((\mathrm{id} \otimes \gamma(E_j)) \nabla_{E_j}(f_i s_i) \Big) \\
&= \sum_{ij} \Big(\vartheta(R_*(E_j) f_i) \gamma(E_j) s_i + \vartheta(f_i) \gamma(E_j) \nabla_{E_j} s_i \Big) \\
&= \sum_{ij} \Big({R'}_*(E_j)(\vartheta(f_i)) \gamma(E_j) s_i + \vartheta(f_i) \gamma(E_j) \nabla_{E_j} s_i \Big) \\
&= \sum_{ij} (\mathrm{id} \otimes \gamma(E_j))\, \nabla_{E_j}(\vartheta(f_i) s_i) \\
&= D\Big((\vartheta \otimes \mathrm{id})(s) \Big).
\end{aligned}$$

Somit ist $\vartheta \otimes \mathrm{id}$ ein Isomorphismus von Hilbert-Räumen, der Eigenräume und Eigenwerte erhält, d. h. die Dirac-Spektren stimmen überein. □

Um weitere Anwendungen von Satz 8.1 zu erhalten, benötigen wir ein Kriterium, das uns sagt, wann (Γ, χ) und (Γ', χ') darstellungsäquivalent sind. In den Beispielen zu Satz 8.1 haben wir bereits erwähnt, daß fast-innere Automorphismen darstellungsäquivalente Familien liefern. Dieses Kriterium ist hinreichend, aber nicht notwendig. Wissen wir jedoch, daß G strikt nicht-singulär ist, so erhalten wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium. Eine nilpotente Lie-Gruppe G mit Zentrum $Z(G)$ nennen wir *strikt nicht-singulär*, wenn es für jedes $z \in Z(G)$ und $x \in G - Z(G)$ ein $a \in G$ gibt, so daß

$$xax^{-1}a^{-1} = z.$$

Die Heisenberg-Gruppen sind die einfachsten Beispiele strikt nicht-singulärer nilpotenter Lie-Gruppen. Sei Γ eine kokompakte diskrete Untergruppe von G. Den Quotienten $G/Z(G)$ werden wir mit $\overline{G}$ bezeichnen und das Bild von Γ unter der kanonischen Projektion $\pi : G \to \overline{G}$ mit $\overline{\Gamma}$. Gemäß [Ra72, Proposition 2.17] und [CoG90, Lemma 5.1.4] ist $\overline{\Gamma}$ eine kokompakte diskrete Untergruppe von $\overline{G}$. Wenn $\chi|_{\Gamma\cap Z(G)} \equiv 1$ gilt, dann gibt es ein $\overline{\chi}$, so daß

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, two heads] & \{-1,1\} \\ \overline{\Gamma} \arrow[ur, "\overline{\chi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Solche χ werden *projizierbar* genannt. Im Fall $\dim Z(G) = 1$ stimmt diese Definition mit der Definition von projizierbaren Spin-Strukturen in Kapitel 7 überein.

Satz 8.3. *Sei G eine einfach zusammenhängende, strikt nicht-singuläre nilpotente Lie-Gruppe mit links-invarianter Metrik. Seien Γ_1, Γ_2 kokompakte, diskrete Untergruppen von G, so daß*

$$\Gamma_1 \cap Z(G) = \Gamma_2 \cap Z(G) \quad (=: \Gamma_Z)$$

und seien $\chi_i : \Gamma_i \to \{-1,1\}$ Homomorphismen. Wir definieren den Volumenquotienten als

$$v := \frac{\mathrm{vol}(\overline{\Gamma}_1\backslash\overline{G})}{\mathrm{vol}(\overline{\Gamma}_2\backslash\overline{G})} = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma_1\backslash G)}{\mathrm{vol}(\Gamma_2\backslash G)} \in \mathbb{Q}^+.$$

Dann sind (Γ_1, χ_1) und (Γ_2, χ_2) genau dann darstellungsäquivalent, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\chi_1|_{\Gamma_Z} \equiv \chi_2|_{\Gamma_Z} \equiv 1$ *und* $(\overline{\Gamma}_1, \overline{\chi}_1)$ *und* $(\overline{\Gamma}_2, \overline{\chi}_2)$ *sind darstellungsäquivalent für* $\overline{G}$.

(2) $\chi_1|_{\Gamma_Z} \equiv \chi_2|_{\Gamma_Z} \not\equiv 1$ *und* $v = 1$.

Zusatz 8.4. Wenn unter den Voraussetzungen des obigen Satzes $\chi_1|_{\Gamma_Z} \equiv \chi_2|_{\Gamma_Z} \not\equiv 1$ aber $v \neq 1$, dann sind (Γ_1, χ_1) und (Γ_2, χ_2) „darstellungsäquivalent bis auf Multiplizität v“, d. h. $L^2_{\chi_1}(\Gamma_1\backslash G)$ und $L^2_{\chi_2}(\Gamma_2\backslash G)$ haben dieselben irreduziblen Komponenten und für jede irreduzible Komponente H ist das Verhältnis der Multiplizitäten m_1, m_2 gerade $v = m_1/m_2$.

Beweis von Satz 8.3 und Zusatz 8.4. Wenn $(\Gamma_1\backslash G, \chi_1)$ und $(\Gamma_2\backslash G, \chi_2)$ darstellungsäquivalent sind, dann sind $L^2_{\chi_1}(\Gamma_1\backslash G)$ und $L^2_{\chi_2}(\Gamma_2\backslash G)$ auch äquivalent als Γ_Z-Moduln. Da die Operation von $g_0 \in \Gamma_Z$ auf $L^2_{\chi_i}(\Gamma_i\backslash G)$ einfach Multiplikation mit $\chi_i(g_0)$ ist, erhalten wir

$$\chi_1|_{\Gamma_Z} \equiv \chi_2|_{\Gamma_Z}.$$

Sei $\mathcal{T}$ die Menge der koadjungierten Orbiten von $\mathfrak{g}^*$. Gemäß der Kirillov-Theorie parametrisiert $\mathcal{T}$ die Menge der irreduziblen unitären Darstellungen von G. Wir schreiben die Elemente von $\mathcal{T}$ in der Form $[\tau]$ mit $\tau \in \mathfrak{g}^*$. Den irreduziblen G-Modul, der $[\tau] \in \mathcal{T}$ entspricht, wollen wir mit $H_{[\tau]}$ bezeichnen. Wir zerlegen $L^2_{\chi_i}(\Gamma_i\backslash G)$ in seine irreduziblen Darstellungen

$$L^2_{\chi_i}(\Gamma_i\backslash G) = \bigoplus_{[\tau]\in\mathcal{T}} m_i([\tau])H_{[\tau]},$$

wobei $m_i([\tau]) \in \mathbb{N}_0$ die Multiplizität von $H_{[\tau]}$ bezeichnet. Sei $\mathfrak{z}$ die Lie-Algebra des Zentrums $Z(G)$. Die Operation von $Z(G)$ auf $H_{[\tau]}$ ist genau dann trivial, wenn $\tau|_{\mathfrak{z}} \equiv 0$. Deshalb ist

$$H_i^{\mathrm{proj}} := \bigoplus_{\substack{[\tau]\in\mathcal{T} \\ \tau|_{\mathfrak{z}}\equiv 0}} m_i([\tau])H_{[\tau]} \qquad i = 1, 2$$

der Raum der L^2-Funktionen, auf denen $Z(G)$ trivial operiert. Das orthogonale Komplement ist

$$H_i^{\perp} := \bigoplus_{\substack{[\tau]\in\mathcal{T} \\ \tau|_{\mathfrak{z}}\not\equiv 0}} m_i([\tau])H_{[\tau]} \qquad i = 1, 2\,.$$

Die G-Moduln $L^2_{\chi_i}(\Gamma_i\backslash G)$ für $i = 1, 2$ sind genau dann isomorph, wenn H_1^{proj} isomorph zu H_2^{proj} und $H_1^{\perp}$ isomorph zu $H_2^{\perp}$ ist. Zunächst wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen H_1^{proj} und H_2^{proj} isomorph sind, und dann betrachten wir $H_1^{\perp}$ und $H_2^{\perp}$.

Im Fall $\chi_i|_{\Gamma_Z} \not\equiv 1$ haben wir $H_i^{\mathrm{proj}} = \{0\}$. Deswegen sind H_1^{proj} und H_2^{proj} trivialerweise isomorphe G-Moduln.

Im Fall $\chi_i|_{\Gamma_Z} \equiv 1$ sind die Elemente von H_i^{proj} genau die Funktionen in $L^2(\Gamma_i\backslash G)$, die Pullbacks von Funktionen in $L^2_{\overline{\chi}_i}(\overline{\Gamma}_i\backslash\overline{G})$ sind. Wir erhalten also einen Modulisomorphismus (sowohl für die Gruppenwirkung G als auch für die von $\overline{G}$)

$$H_i^{\mathrm{proj}} \xrightarrow{\sim} L^2_{\overline{\chi}_i}(\overline{\Gamma}_i\backslash\overline{G}).$$

Deswegen sind in diesem Fall H_1^{proj} und H_2^{proj} genau dann isomorphe G-Moduln, wenn $(\overline{\Gamma}_1, \overline{\chi}_1)$ und $(\overline{\Gamma}_2, \overline{\chi}_2)$ darstellungsäquivalent für $\overline{G}$ sind.

Nun wollen wir die $H_i^\perp$ untersuchen. Im nachfolgenden Lemma 8.5 werden wir zeigen, daß $m_i([\tau]) = c_{G,\tau} \cdot \mathrm{vol}(\overline{\Gamma}_i \backslash \overline{G})$ für alle $[\tau] \in \mathcal{T}$ mit $\tau|_{\mathfrak{z}} \not\equiv 0$, wobei $c_{G,\tau}$ nur von G, von τ, und von der Volumenform auf $\overline{G}$ abhängt, aber unabhängig vom Gitter Γ_i ist. Hiermit können wir dann den Beweis führen: Angenommen, Bedingung (1) oder (2) im Satz sei erfüllt. Dann wissen wir aufgrund von Korollar 8.2, daß der Volumenquotient v gleich 1 ist, und deswegen sind $H_1^\perp$ und $H_2^\perp$ isomorphe G-Moduln. Und wenn wir das Lemma für $v \neq 1$ anwenden, erhalten wir Zusatz 8.4. □

Nun wenden wir uns Lemma 8.5 zu. Das Lemma ist eine Folgerung aus [MoW73]. Um die Notation zu vereinfachen, lassen wir im folgenden den Index i weg.

Für ein $\rho \in \mathfrak{z}^*$ definieren wir eine Bilinearform auf $\overline{\mathfrak{g}}$ durch

$$b_\rho(\overline{X}, \overline{Y}) := \rho([X, Y]),$$

wobei X und Y Vektoren in $\mathfrak{g}$ sind und deren Bilder in $\overline{\mathfrak{g}}$ mit $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ bezeichnet werden.

Da $\mathfrak{g}$ strikt nicht-singulär ist, wissen wir, daß b_ρ für alle $\rho \neq 0$ nicht ausgeartet ist [MoW73, Go96]. Deswegen hat $\overline{\mathfrak{g}}$ gerade Dimension, etwa $\dim \overline{\mathfrak{g}} = 2d$. Wir definieren nun das affine Gitter $L_{\Gamma,\chi}$ durch

$$L_{\Gamma,\chi} := \left\{ \rho \in \mathfrak{z}^* \mid e^{2\pi i \rho(z)} = \chi(z) \quad \forall z \in \log(\Gamma_Z) \right\}.$$

Lemma 8.5. *Wenn $\rho := \tau|_{\mathfrak{z}} \in L_{\Gamma,\chi} - \{0\}$ gilt, dann ist*

$$m([\tau]) = \Big| \int\limits_{\overline{\Gamma} \backslash \overline{G}} \underbrace{b_\rho \wedge \ldots \wedge b_\rho}_{d\text{-}mal} \Big| = \mathrm{vol}(\overline{\Gamma} \backslash \overline{G}) \cdot c_{G,\tau}$$

wobei $c_{G,\tau}$ nur von G, von τ und von der Volumenform auf $\overline{G}$ abhängt.

Im Fall $\rho := \tau|_{\mathfrak{z}} \in \mathfrak{z}^* - (L_{\Gamma,\chi} \cup \{0\})$ gilt $m([\tau]) = 0$.

Das Lemma sagt nichts aus über den Fall $\rho = 0$. der Leser beachte, daß in jeder strikt nicht-singulären Lie-Gruppe die Bahn von $\tau|_{\mathfrak{z}} \neq 0$ gerade die Menge aller $\tau' \in \mathfrak{g}^*$ mit $\tau|_{\mathfrak{z}} \equiv \tau'|_{\mathfrak{z}}$ ist.

Beweis von Lemma 8.5. Im Fall $\chi \equiv 1$ ist das Lemma eine direkte Folgerung aus [MoW73, Theorem 7]. Im Fall $\chi \not\equiv 1$ setzen wir $\Gamma' := \ker(\chi)$ und zerlegen

$$L_1^2(\Gamma' \backslash G) = L_1^2(\Gamma \backslash G) \oplus L_\chi^2(\Gamma \backslash G)$$

als orthogonale Summe von G-Moduln. Für $(\Gamma, 1)$ und $(\Gamma', 1)$ wissen wir bereits, daß das Lemma gültig ist. Da jede irreduzible Darstellung nur endlich oft vorkommt, berechnet sich die Multiplizität einer irreduziblen Darstellung in $L^2_\chi(\Gamma\backslash G)$ gerade als Differenz der Multiplizitäten dieser Darstellung in $L^2_1(\Gamma'\backslash G)$ und in $L^2_1(\Gamma\backslash G)$. Wenn χ projizierbar ist, dann gilt $L_{\Gamma,\chi} = L_{\Gamma,1} = L_{\Gamma',1}$, aber $\mathrm{vol}(\overline{\Gamma}'\backslash\overline{G}) = 2\mathrm{vol}(\overline{\Gamma}\backslash\overline{G})$; wenn jedoch χ nicht-projizierbar ist, dann gilt $L_{\Gamma',1} = L_{\Gamma,1}\dot{\cup}L_{\Gamma,\chi}$ und $\mathrm{vol}(\overline{\Gamma}\backslash\overline{G}) = \mathrm{vol}(\overline{\Gamma}'\backslash\overline{G})$. Somit folgt das Lemma für beliebiges χ. □

SATZ 8.6. *Es gibt eine Familie von Nilmannigfaltigkeiten, so daß*

(1) *der Laplace-Operator auf Funktionen konstantes Spektrum hat,*

(2) *der Laplace-Operator auf 1-Formen nicht-konstantes Spektrum hat,*

(3) *das markierte Längenspektrum konstant ist,*

(4) *der Dirac-Operator für projizierbare Spin-Strukturen nicht-konstantes Spektrum hat und*

(5) *der Dirac-Operator für nicht-projizierbare Spin-Strukturen konstantes Spektrum hat.*

Beweis. Die Beispiele I und II aus [Go97] werden die gewünschten Eigenschaften haben. Die Eigenschaften (1)–(3) wurden bereits in [Go97] gezeigt. Wir werden nun (4) und (5) für Beispiel I nachweisen. Die Argumente für Beispiel II sind analog.

Wir wollen zunächst die Definition von Beispiel I aus [Go97] wiederholen. Sei $\mathfrak{g}$ eine 7-dimensionale Lie-Algebra mit Orthonormalbasis $\{X_1, X_2, X_3, X_4, Z_1, Z_2, \mathcal{Z}\}$, und die Lie-Klammer sei definiert durch

$$\begin{array}{ccccccc} [X_1,X_2] & = & [X_3,X_4] & = & Z_1+\mathcal{Z} & & \\ [X_1,X_3] & = & [X_4,X_2] & = & Z_2 & & \\ [X_2,X_3] & = & [X_1,Z_1] & = & [Z_2,X_4] & = & \mathcal{Z}. \end{array}$$

Alle anderen Lie-Klammern von Basisvektoren seien Null. Diese Lie-Algebra ist streng nicht-singulär und und $\mathcal{Z}$ erzeugt das Zentrum von $\mathfrak{g}$. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos s & 0 & 0 & \sin s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2s & -\sin 2s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2s & \cos 2s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin s & 0 & 0 & \cos s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos s & -\sin s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+\cos s & -\sin s & 1 \end{pmatrix}$$

definiert eine Familie von Lie-Algebra-Automorphismen φ_s von $\mathfrak{g}$ und induziert eine Familie von Lie-Gruppen-Automorphismen Φ_s von G, d. h. $\Phi_{s*} = \varphi_s$.

Das Zentrum $Z(G)$ ist punktweise fest unter den Automorphismen Φ_s. Deswegen induziert Φ_s einen Automorphismus $\overline{\Phi}_s$ von $\overline{G} = G/Z(G)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi_s"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ \overline{G} \arrow[r, "\overline{\Phi}_s"] & \overline{G}. \end{tikzcd}$$

Diese $\overline{\Phi}_s$ operieren auch isometrisch, wohingegen die Φ_s nicht isometrisch operieren.

Sei Γ eine beliebige diskrete, kokompakte Untergruppe von G. Wir schreiben $\Gamma_s := \Phi_s(\Gamma)$, $\overline{\Gamma} = \pi(\Gamma)$ und $\overline{\Gamma}_s := \overline{\Phi}_s(\overline{\Gamma})$.

Wir zeigen nun, daß die Familie $M_s := \Gamma_s \backslash G$, $s \in \mathbb{R}$ den Bedingungen des Satzes genügt. Wie bereits erwähnt, hat Ruth Gornet in [Go97] gezeigt, daß diese Familie isospektral für den Laplace-Operator auf Funktionen, aber nicht-isospektral für den Laplace-Operator auf 1-Formen ist. Sie zeigte auch, daß Φ_s das markierte Längenspektrum erhält.

Zu zeigen bleiben (4) und (5), beginnen wir mit (5). Die nicht-projizierbare Spin-Struktur auf M_0 werde durch $\chi : \Gamma \to \{-1, 1\}$ beschrieben. Da die Spin-Struktur stetig von s abhängen soll, ist die Spin-Struktur auf M_s gegeben durch $\chi \circ {\Phi_s}^{-1}$ und deswegen ebenfalls nicht-projizierbar. Da $\overline{\Phi}_s$ eine Familie von isometrischen Automorphismen ist, hängt das Volumen $\overline{\Gamma}_s \backslash \overline{G}$ nicht von s ab. Deswegen ist Bedingung (2) in Satz 8.3 erfüllt, und somit ist $\left(\Phi_s \circ \Gamma, \chi \circ {\Phi_s}^{-1}\right)$ eine Familie paarweise darstellungsäquivalenter Spin-Nilmannigfaltigkeiten. Aus Satz 8.1 folgt, daß dann auch das Spektrum des Dirac-Operators unabhängig von s ist.

Um (5) zu zeigen, nehmen wir nun an, daß M_0 eine projizierbare Spin-Struktur trägt, die durch $\chi : \Gamma \to \{-1, 1\}$ beschrieben wird. Weiterhin beschreibe $\overline{\chi} : \overline{\Gamma} \to \{-1, 1\}$ die induzierte Spin-Struktur auf $\overline{\Gamma} \backslash \overline{G}$. Aus Stetigkeitsgründen folgt wiederum wie oben, daß $\chi_s := \chi \circ {\Phi_s}^{-1}$ und $\overline{\chi}_s := \overline{\chi} \circ {\overline{\Phi}_s}^{-1}$ die Spin-Strukturen auf M_s und $\overline{M}_s := \overline{\Gamma}_s \backslash \overline{G}$ beschreiben.

Genauso wie im Beweis von Satz 8.1 schreiben wir den Raum der L^2-Spinoren auf M_s als

$$L^2\left(\Sigma_{\chi_s}(\Gamma_s \backslash G)\right) = L^2_{\chi_s}(\Gamma_s \backslash G) \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma_7.$$

Für unsere Berechnungen können wir annehmen, daß

$$\omega := \gamma(E_1) \cdot \gamma(E_2) \cdot \ldots \cdot \gamma(E_7)$$

wie $-\,\mathrm{Id}$ auf Σ_7 operiert. Wie im Beweis von Satz 8.3 schreiben wir

$$L^2_{\chi_s}(\Gamma_s\backslash G) = \bigoplus_{[\tau]\in\mathcal{T}} m_s([\tau]) H_{[\tau]}.$$

Die Leibniz-Regel (8.0.1) besagt, daß $H_{[\tau]} \otimes \Sigma_7$ ein Unterraum ist, der unter $\nabla_{E_j} : L^2(\Sigma_{\chi_s}(\Gamma_s\backslash G)) \to L^2(\Sigma_{\chi_s}(\Gamma_s\backslash G))$ und somit auch unter dem Dirac-Operator $D = \sum_{j=1}^7 (\mathrm{id} \otimes \gamma(E_j)) \cdot \nabla_{E_j}$ invariant ist.

Somit gilt

$$\operatorname{spec} D^{M_s} = \bigcup_{[\tau]\in\mathcal{T}} \operatorname{spec} D|_{H_{[\tau]}\otimes\Sigma_7},$$

und die Multiplizität eines jeden Eigenwerts λ von D^{M_s} ist die Summe von $m_s([\tau])$ mal der Multiplizität des Eigenwerts λ in $D|_{H_{[\tau]}\otimes\Sigma_7}$.

Um zu beweisen, daß $\operatorname{spec} D^{M_s}$ nicht-konstant in s ist, reicht es zu zeigen, daß es einen Eigenwert λ_s in $\operatorname{spec} D^{M_s}$ gibt, der stetig von s abhängt, aber nicht-konstant in s ist.

Wir zeigen deswegen die Existenz eines $\tau \in \mathfrak{g}^*$ mit den Eigenschaften, daß $\tau_s := \tau \circ {\Phi_s}^{-1}$ positive Multiplizität $m_s([\tau_s]) > 0$ hat und daß $D|_{H_{[\tau_s]}\otimes\Sigma_7}$ mindestens einen Eigenwert hat, der stetig von s abhängt. Wir werden sogar ein τ finden, das auf $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ verschwindet, d. h. $H_{[\tau_s]}$ ist 1-dimensional und es reicht zu zeigen, daß die Determinante von $D|_{H_{[\tau_s]}\otimes\Sigma_7}$ nicht-konstant in s ist.

Betrachten wir zunächst ein beliebiges $\tau \in \mathfrak{g}$, das auf $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ verschwindet. Dann operiert $\exp X \in G$ auf $H_{[\tau_s]}$ durch Multiplikation mit $e^{2\pi i \tau_s(X)}$. Elemente f von $H_{[\tau_s]}$ erfüllen $f(\exp X) = c \cdot e^{2\pi i \tau_s(X)}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ mit $c \in \mathbb{C}$. Die Multiplizität von $m_s([\tau_s])$ ist 1, falls alle $X \in \log \Gamma_s$ die Gleichung $e^{2\pi i \tau_s(X)} = \chi_s(\exp X)$ erfüllen. Andernfalls ist die Multiplizität 0. Diese Bedingung ist unabhängig von s.

Nun berechnen wir die Determinante von $D|_{H_{[\tau_s]}\otimes\Sigma_7}$. Wir schreiben $E_1 := X_1, \ldots, E_4 := X_4$, $E_5 := Z_1$, $E_6 := Z_2$ und $E_7 := \mathcal{Z}$, benutzen (2.1.1) und bekommen für $S \in \Sigma_7$ und $f \in H_{[\tau_s]}$:

$$\begin{aligned} D^{M_s}(fS) &= \sum_i \left(R_*(E_i)f\right)\gamma(E_i)S + \frac{1}{4} f \sum_{i,j,k} \Gamma^k_{ij} \gamma(E_i)\gamma(E_j)\gamma(E_k)S \\ &= \sum_{i=1}^4 2\pi i \tau_s(X_i) f \gamma(E_i) S + f A(S) \end{aligned}$$

wobei $A := (1/4)\sum_{i,j,k}\Gamma_{ij}^k\gamma(E_i)\gamma(E_j)\gamma(E_k) \in \mathrm{End}(\Sigma_7)$ konstant in s ist. Unter Verwendung der Koszul-Formel berechnen wir A und erhalten in einer geeigneten Basis die Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & i & i & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -i & -i & -2 \\ 2 & i & -i & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 & i & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & i & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & i & -i & -2 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Daraus bekommen wir

$$\det D|_{H_{[\tau_s]}\otimes\Sigma_7} = \det\left[A + 2\pi i\sum_{i=1}^{4}\tau_s(X_i)\gamma(E_i)\right]$$

und

$$\begin{aligned}
\delta_\tau &:= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \det D|_{H_{[\tau_s]}\otimes\Sigma_7} \\
&= -\frac{1}{64}\pi^2\,(-\tau(X_1)\,\tau(X_2) + \tau(X_3)\,\tau(X_4)) \\
&\quad \Big(4096\,\pi^4\,\tau(X_1)^4 + 4096\,\pi^4\,\tau(X_2)^4 + 4096\,\pi^4\,\tau(X_3)^4 + 4096\,\pi^4\,\tau(X_4)^4 \\
&\quad + 8192\,\pi^4\,\tau(X_1)^2\,\tau(X_2)^2 + 8192\,\pi^4\,\tau(X_1)^2\,\tau(X_3)^2 + 8192\,\pi^4\,\tau(X_2)^2\,\tau(X_3)^2 \\
&\quad + 8192\,\pi^4\,\tau(X_1)^2\,\tau(X_4)^2 + 8192\,\pi^4\,\tau(X_2)^2\,\tau(X_4)^2 + 8192\,\pi^4\,\tau(X_3)^2\,\tau(X_4)^2 \\
&\quad + 512\,\pi^2\,\tau(X_3)\,\tau(X_1) + 128\,\pi^2\,\tau(X_4)^2 + 512\,\pi^2\,\tau(X_4)\,\tau(X_2) + 128\,\pi^2\,\tau(X_2)^2 \\
&\quad + 128\,\pi^2\,\tau(X_1)^2 + 128\,\pi^2\,\tau(X_3)^2 + 1\Big).
\end{aligned}$$

Die Menge

$$\Big\{(\tau(X_1),\tau(X_2),\tau(X_3),\tau(X_4))\,|\,\tau\in\mathfrak{g}^*, \tau|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\equiv 0, m([\tau])>0\Big\}$$

ist ein affines Gitter in $\mathbb{R}^4$ (d. h. bis auf Translation eine diskrete kokompakte Untergruppe). Aber das einzige Polynom, das auf einem affinen Gitter von $\mathbb{R}^4$ verschwindet, ist das Null-Polynom. Deswegen existiert ein $\tau\in\mathfrak{g}^*$ mit $\tau|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\equiv 0$, $m([\tau]) = m([\tau_s]) > 0$ und $\delta_\tau \neq 0$. □

Literaturverzeichnis

[Am94] B. Ammann, **Minimale Geodätische auf Mannigfaltigkeiten mit nilpotenter Fundamentalgruppe**, Diplomarbeit, Universität Freiburg 1994

[Am97] B. Ammann, *Minimal geodesics and nilpotent fundamental groups*, Geom. Dedic. **67**, *129–148* (1997)

[AmB97] B. Ammann, C. Bär, *The Dirac Operator on Nilmanifolds and Collapsing Circle Bundles*, Ann. Global Anal. Geom. **16**, 221–253 (1998),

[AnD97] L. Andersson, M. Dahl, *Scalar curvature rigidity for asymptotically locally hyperbolic manifolds*, Preprint Stockholm, http://xxx.lanl.gov/abs/dg-ga/9707017

[Ban80] C. Bandle, **Isoperimetric inequalities and applications**, Pitman 1980

[Bä91] C. Bär, *Das Spektrum von Dirac-Operatoren*, Bonner Math. Schr. **217** (1991)

[Bä92] C. Bär, *Lower eigenvalue etimates for Dirac operators*, Math. Ann. **293**, *39–46* (1992)

[Bä96] C. Bär, *Metrics with harmonic spinors*, Geom. Funct. Anal. **6**, *899–942* (1996)

[Bä97] C. Bär, *Extrinsic Bounds for Eigenvalues of the Dirac Operator*, Preprint 1997,

[Bau81] H. Baum, **Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten**, Teubner Verlag 1981

[BeB82] L. Bérard Bergery, J.-P. Bourguignon, *Riemannian submersions with totally geodesic fibers*, Illinois J. Math. **26**, *181–200* (1982)

[Be65] M. Berger, **Lecture on geodesics in riemannian geometry**, Tata Institute, Bombay 1965

[Be70] M. Berger, *Quelques problèmes de géométrie riemannienne*, L'Enseignement Mathématique **16**, II. Série, *73–96* (1970)

[Be72] M. Berger, *A l'ombre de Loewner*, Ann. Sc. Norm. Sup., Série 4, tome **5**, *241-260* (1972)

[BeGV91] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, **Heat kernels and Dirac operators**, Springer-Verlag 1991

[Be87] A. L. Besse, **Einstein Manifolds**, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 10, Springer-Verlag 1987

[BoG92] J.-P. Bourguignon, P. Gauduchon, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, Commun. Math. Phys. **144**, *581–599* (1992)

[BrM91] H. Brezis, F. Merle, *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of* $-\Delta u = V(x)e^u$ *in two dimensions*, Comm. Partial Diff. Equat. **16**, no. 8 & 9, *1223–1253* (1991)

[BuZ88] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller, **Geometric inequalities**, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 285, Springer-Verlag 1988

[Ca92] M. do Carmo, **Differentialgeometrie von Kurven und Flächen**, 2. Auflage, Vieweg 1992

[CoG90] L. Corwin, F. P. Greenleaf, **Representations of nilpotent Lie groups and their applications, Part1: Basic theory and examples**, Cambridge University Press 1990

[Eb94] P. Eberlein, *Geometry of two-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Ann. Scien. de l'Ecole Norm. Sup. **27**, *611–660* (1994)

[Fe69] H. Federer, **Geometric measure theory**, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 153, Springer-Verlag 1969

[Fo81] O. Forster, **Lectures on Riemann surfaces**, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1981

[FrHS82] M. Freedman, J. Hass, P. Scott, *Closed geodesics on surfaces*, Bull. London Math. Soc. **14**, *385–391* (1982)

[Fr80] T. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nicht-negativer Krümmung*, Math. Nach. **97**, *117–146* (1980)

[Fr84] T. Friedrich, *Zur Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur*, Colloq. Math. **48**, *57–62* (1984)

[Fr97] T. Friedrich, **Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie**, Vieweg 1997

[Fu87] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator*, Invent. Math. **87**, 517–547 (1987)

[GiT77] D. Gilbarg, N. Trudinger, **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 224, Springer-Verlag 1977

[GoW84] C. Gordon, E. Wilson, *Isospectral deformations of compact solvmanifolds,* J. Diff. Geom. **19**, *241–256* (1984)

[Go96] R. Gornet, *A New Construction of Isospectral Riemannian Nilmanifolds with Examples,* Michigan Math. J. **43**, *159–188* (1996)

[Go97] R. Gornet, *Continuous families of Riemannian manifolds isospectral on functions but not on 1-forms*, Preprint 97, to appear in J. Geom. Anal.

[Gr81] M. Gromov, **Structures métriques pour les Variétés Riemanniennes**, herausgegeben von J. Lafontaine & P. Pansu, CEDIC: Paris 1981

[He91] J. J. Hebda, *Two geometric inequalities for the torus*, Geom. Dedic. **38**, *101–106* (1991)

[HeP92] U. Hertrich-Jeromin, U. Pinkall, *Ein Beweis der Willmoreschen Vermutung für Kanaltori*, J. Reine Angew. Math. **430**, *21–34* (1992)

[Hij86] O. Hijazi, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing Spinors*, Comm. Math. Phys. **104**, *151–162* (1986)

[Hil1886] G. W. Hill, *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the motions of the sun and the moon,* Acta Math. **VIII**, no. 1, *1–36* (1886)

[Hir76] M. W. Hirsch, **Differential Topology**, Graduate Texts in Mathematics 33, Springer-Verlag 1976

[Hit74] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Adv. Math. **14**, *1–55* (1974)

[Jo97] J. Jost, **Compact Riemann Surfaces**, Universitext, Springer-Verlag 1997

[KaW74] J. L. Kazdan, F. W. Warner, *Curvature functions for compact 2-manifolds*, Ann. Math. **99**, *14–47* (1974)

[Ki86] K.-D. Kirchberg, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature*, Ann. Glob. Anal. Geom. **4**, *291–325* (1986)

[Ki88] K.-D. Kirchberg, *Compact six-dimensional Kähler spin manifolds of positive scalar curvature with the smallest possible first eigenvalue of the Dirac operator*, Math. Ann. **282**, *157–176* (1988)

[Ki62] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russ. Math. Surveys **17**, *53–104* (1962), Uspekhi Mat. Nauk **17**, *57–110* (1962)

[Ko72] Y. Kosmann, *Dérivées de Lie des spineurs*, Ann. Math. Pura ed Appl. **91**, *317–395* (1972)

[KoT91] V. V. Kozlov, D. M. Treshchëv, **Billiards, A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts**, Translations of Math. Monographs, Volume 89, AMS 1991

[KrSW97] W. Kramer, U. Semmelmann, G. Weingart, *Eigenvalue estimates for the Dirac operator on quaternionic Kähler manifolds*, Preprint 1997, erscheint in Math. Z.

[KuS97] R. Kusner, N. Schmitt, *The spinor representation of surfaces in space*, Preprint 1997

[LaM89] H.-B. Lawson, M.-L. Michelsohn, **Spin Geometry**, Princeton University Press, Princeton 1989

[LiY82] P. Li, S. T. Yau, *A new conformal invariant and its applications to the Willmore Conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math. **69**, *269–291* (1982)

[Lo86] J. Lott, *Eigenvalue bounds for the Dirac operator,* Pacific J. of Math., **125**, no. 1, *117–126*, (1986)

[MaW66] W. Magnus, S. Winkler, **Hill's Equation**, Interscience Tracts In Pure And Applied Mathematics no. 20, Interscience Publishers, John Wiley & Sons 1966

[McM75] H. P. McKean, P. van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation,* Invent. Math. **30**, *217–274* (1975)

[Mi64] J. Milnor, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. **51**, *542* (1964)

[Mi65] J. Milnor, **Topology from the differentiable viewpoint**, University Press of Virginia 1965

[Mi74] J. Milnor, J. Stasheff, **Characteristic Classes**, Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, Princeton 1974

[MoW73] C. G. Moore, J. A. Wolf, *Square integrable representations of nilpotent groups*, Trans. AMS **185**, *445–462* (1973)

[Mo24] M. Morse, *A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one*, Trans. Amer. Soc. **26**, *25–60* (1924)

[Mo88] F. Morgan, **Geometric measure theory**, Academic Press, 1988

[Mo96] A. Moroianu, *Opérateur de Dirac et submersions riemanniennes*, Thesis, École Polytechnique, Palaiseau 1996

[Os78] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. Math. Soc. **84** no. 6, 1182–1238 (1978)

[Pi85] U. Pinkall, Regular homotopy classes of immersed surfaces, Topology **24**, 421–434 (1985)

[Pu52] P. M. Pu, *Some inequalities in certain nonorientable riemannian manifolds*, Pac. J. Math. **2** *55–71* (1952)

[Ra72] M. S. Raghunathan, **Discrete subgroups of Lie groups**, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68, Springer-Verlag 1972.

[Ri97] J. Richter, **Conformal maps of a Riemann surface into the space of quaternions**, Dissertation, TU Berlin 1997

[Ro88] J. Roe, **Elliptic operators, topology and asymptotic methods**, Pitman Research Notes in Mathematics Series 179, Longman 1988

[Sch93] R. Schneider, **Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory**, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 44, Cambridge University Press 1993

[Sh70] K. Shiohama, R. Takagi, *A characterization of a standard torus in E^3*, J. Diff. Geom. **4**, *477–485* (1970)

[Si93] L. Simon, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Comm. Anal. Geom. **1** No. 2, *281–326* (1993)

[LaS84] J. Langer, D. Singer, *Curves in the hyperbolic plane and mean curvature of tori in 3-space*, Bull. London Math. Soc. **16**, *531–534* (1984)

[Tai97] I. A. Taimanov *Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces*, V. M. Buchstaber (ed.) et al., **Solitons, geometry, and topology: on the crossroad**. Providence, RI: American Mathematical Society, Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. **179** (33), *133-151* (1997)

[Tai97a] I. A. Taimanov *Surfaces of revolution in terms of solitons*, Ann. Global Anal. Geom. **15** no. 5, *419–435* (1997)

[To97] P. Topping, *Mean curvature flow and geometric inequalities*, Preprint ETH Zürich, 1997, erscheint in J. Reine Angew. Math.

[To97a] P. Topping, *The isoperimetric inequality on a surface*, Preprint IHES Bures-sur-Yvette, 1997

[Wa56] B. L. van der Waerden, **Erwachende Wissenschaft**, Birkhäuser Basel 1956

[We78] J. L. Weiner, *On a problem of Chen, Willmore, et al.*, Ind. Math. J. **27**, No. 1, *19–35* (1978)

[WhW02] E. T. Whittaker & G. N. Watson, **A course of modern analysis**, Cambridge University Press, 4. Auflage Cambridge 1927, (1. Auflage 1902)

[Wi59] T. J. Willmore, **Introduction to differential Geometry**, Clarendon Press Oxford 1959

[Wi82] T. J. Willmore, **Total mean curvature in Riemannian geometry**, Ellis Horword Ltd., distributed by John Wileys & Sons 1982