Analysis III: Kurztest Nr. 2, 40 Minuten

Universität Regensburg, Wintersemester 2026/27
Prof. Dr. Bernd Ammann, Tobias Hirsch

Dienstag, 17.11.2026, Beginn 14:20, Zeit 40 Minuten

Name, Vorname: ..... **Übungsgruppe Nr.:** ☐

Anzahl der abgegebenen Blätter (ohne Aufgabenblatt) ☐

Schreiben Sie auf JEDES abgegebene Blatt Papier: Vorname, Name und Übungsgruppennummer! Nummerieren Sie Ihre Lösungsblätter. Geben Sie dieses Aufgabenblatt (= Blatt 0) auch ab.
Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt; insbesondere dürfen Taschenrechner, Vorlesungsmitschrifte, Mobiltelephone, etc. nicht benutzt werden.

---

1. Aufgabe (0,5+0,5+1 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in \Omega$,

a) Definieren Sie: Ω ist sternförmig bezüglich z_0.

b) Definieren Sie: Ω ist einfach zusammenhängend bezüglich z_0.

c) Beweisen Sie: Ist Ω sternförmig bezüglich z_0, dann ist Ω einfach zusammenhängend bezüglich z_0.

2. Aufgabe (1+1+1 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma : [a,b] \to \Omega$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Entscheiden Sie für jede der folgenden Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, ob das Integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ wegunabhängig ist, das heißt, ob für alle Kurven γ wie oben das Integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ nur von $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ und f abhängt. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an:

a) $\Omega = \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z\mathrm{Re}z$.

b) $\Omega = B_3(0) \setminus \overline{B}_1(0) \subset \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{iz}$.

c) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$.

Die 3. Aufgabe ist auf der Rückseite dieses Blatts.

Wir erinnern an Satz 3.17 im Skript:

Satz (Cauchyscher Integralsatz (für homotope Kurven)). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $\gamma, \tau\colon [a,b] \to \Omega$ stückweise stetig differenzierbare Kurven, γ homotop zu τ mit festen Endpunkten. Dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\tau f(z)\,\mathrm{d}z.$$

3. Aufgabe (2+1 Punkte). Gegeben sei die geschlossene Kurve

$$\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = e^{2it} + \frac{1}{2}e^{-it}.$$

Wir schreiben

$$\mathcal{W}(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

für die Windungszahl von γ bezüglich $a \notin \gamma([0,2\pi])$.

a) Bestimmen Sie $\mathcal{W}(\gamma, 0)$ und $\mathcal{W}(\gamma, 2)$. Begründen Sie Ihre Antwort und zeigen Sie insbesondere, dass die Kurve beide Punkte vermeidet.

Hinweis: Vergleichen Sie γ durch eine geeignete Homotopie mit der Kurve $t \mapsto e^{2it}$.

b) Berechnen Sie mithilfe von a) das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung