Analysis III: Kurztest 40 Minuten

Universität Regensburg, Wintersemester 2026/27
Prof. Dr. Bernd Ammann, Tobias Hirsch

Dienstag, 27.10.2026, Beginn 14:20, Zeit 40 Minuten

Kurztest Nr. 1

Schreiben Sie auf JEDES abgegebene Blatt Papier: Vorname, Name und Übungsgruppennummer! Nummerieren Sie Ihre Lösungsblätter. Geben Sie dieses Aufgabenblatt (= Blatt 0) auch ab.

Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt; insbesondere dürfen Taschenrechner, Vorlesungsmitschrifte, Mobiltelephone, etc. nicht benutzt werden. Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen des Kurztests, der Kurztest wird dann mit 0 *Punkten bewertet.*

1. Aufgabe (2 Punkte). Bestimmen Sie alle Punkte, in denen folgende Funktionen komplex differenzierbar sind:

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z\mathrm{Re}z$.

b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = |z-1|^2$.

2. Aufgabe (2 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbare Funktionen, so ist auch $f \cdot g$ komplex differenzierbar in z_0 und es gilt:

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

Hinweis: Sie können entweder den Beweis für reelle Zahlen aus der Analysis I auf komplexe Zahlen anpassen. Oder alternativ dazu können Sie die Aussage beweisen, indem Sie obige Gleichung in Aussagen der Analysis II für Funktionen $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *übersetzen.*

3. Aufgabe (4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Eine holomorphe Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f, falls für alle $z \in \Omega$ gilt: $F'(z) = f(z)$. Sei $\gamma : [a, b] \to \Omega$ eine C^1-Kurve. Zeigen Sie:

a) Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

b) Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^k$, mit $k \in \mathbb{Z}$, besitzt genau dann eine Stammfunktion, wenn $k \neq -1$.
Hinweis: Betrachten Sie die Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := e^{2\pi i t}$ *und nutzen Sie Aufgabenteil* a).

Name, Vorname: ..... **Übungsgruppe Nr.:** ☐

Anzahl der abgegebenen Blätter (ohne Aufgabenblatt) ☐

Dieses Aufgabenblatt ist Blatt 0.