Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann

WiSe 2026
Zentralübung 6 vom 24.11.2026
Zentralübungsblatt Nr. 4

Zentralübung Analysis III

Übungsaufgabe zu Windungszahlen

Aufgabe 1.
Für $0 \le t \le 2\pi$ sei $w(t) = \frac{3}{2}e^{it}$. Betrachten Sie die Kurve mit der Parametrisierung

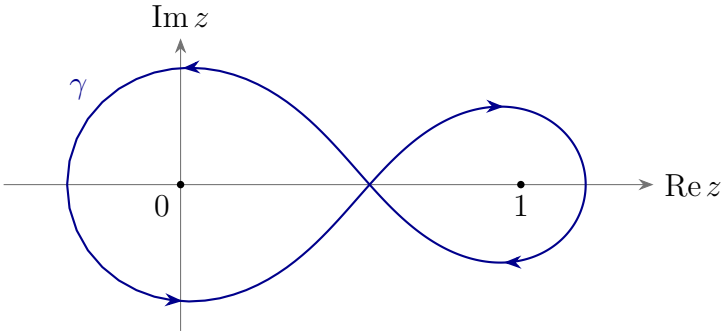
$$\gamma(t) = \frac{(w(t)-1)^2}{w(t)(w(t)-2)}.$$

Für einen Punkt $a \notin \gamma([0,2\pi])$ ist die Windungszahl von γ um a gegeben durch

$$\mathcal{W}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz.$$

a) Zeigen Sie, dass $\gamma(t)$ für alle t definiert ist und weder den Wert 0 noch den Wert 1 annimmt.

b) Bestimmen Sie $\mathcal{W}(\gamma, 0)$ und $\mathcal{W}(\gamma, 1)$. Begründen Sie Ihre Ergebnisse. *Hinweis:* Bringen Sie $\gamma(t) - 1$ auf einen Bruch. Mit der Produkt- und Quotientenregel können Sie $\gamma'(t)/(\gamma(t)-a)$ als Summe einfacher Terme schreiben.



Übungsaufgaben zum Cauchyschen Integralsatz

Aufgabe 2.

Sei $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ für $0 \le t \le 2\pi$. Berechnen Sie mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z+1}\,dz.$$

Geben Sie ein einfach zusammenhängendes Gebiet an, das die Kurve enthält und auf dem der Integrand holomorph ist.

Aufgabe 3.

Sei $\gamma(t) = 2e^{it}$ für $0 \le t \le 2\pi$. Gesucht ist das Kurvenintegral

$$I = \int_\gamma \frac{e^{3z} - 1}{z^2}\, dz.$$

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$ so, dass sich die Funktion

$$g_c(z) = \frac{e^{3z} - 1}{z^2} - \frac{c}{z}, \qquad z \neq 0,$$

holomorph nach $z = 0$ fortsetzen lässt. Geben Sie auch den Wert der Fortsetzung in 0 an.

b) Wenden Sie den Cauchyschen Integralsatz auf die Fortsetzung aus a) an und berechnen Sie I.

Hinweis zu a): Verwenden Sie die Potenzreihe von e^{3z} um 0.