Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann

WiSe 2026
Zentralübung 3 vom 3.11.2026
Zentralübungsblatt Nr. 3

# Zentralübung Analysis III

**Aufgabe 1.**

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbare Funktionen, so ist auch $f \pm g$ komplex differenzierbar in $z_0$ und es gilt:

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0) \quad (\textit{Summenregel}).$$

(b) Seien $\Omega, \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie die *Kettenregel*: Ist $g : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ komplex differenzierbar in $z_0$ und $f : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $g(z_0)$, so ist auch $f \circ g : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0$ und es gilt

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0).$$

**Aufgabe 2.**
Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)}.$$

a) Entwickeln Sie beide Faktoren mithilfe der geometrischen Reihe und bestimmen Sie durch das Cauchy-Produkt eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Geben Sie eine geschlossene Formel für $a_n$ an.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der erhaltenen Potenzreihe.

**Aufgabe 3** (Eine Reihe – zwei verschiedene Konvergenzgebiete).
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ betrachten wir

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}.$$

a) Bestimmen Sie die Menge aller $z$, für die diese Reihe konvergiert, und berechnen Sie dort ihre Summe.

b) Entwickeln Sie jeden Summanden um $z = 0$. Verwenden Sie dazu

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^k, \qquad |z| < 1.$$

Sie erhalten eine Doppelreihe. Zeigen Sie, dass diese für $|z| < \frac{1}{2}$ absolut konvergiert.

c) Ordnen Sie die Doppelreihe nach gleichen Potenzen von $z$:

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m.$$

Bestimmen Sie $a_m$ und den Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Begründen Sie ausdrücklich, warum das Umordnen zulässig ist.

d) Die ursprüngliche Reihe konvergiert bei $z = -1$, die neue Potenzreihe hingegen nicht. Erklären Sie, warum dies kein Widerspruch ist.

*Hinweis zu Teil c):* Welche Paare $(n, k)$ tragen zum Koeffizienten von $z^m$ bei?