

Zentralübung Analysis III

Übungen zu Länge und Energie aus dem Skript

Aufgabe 1. (Übung I.1.9 im Skript.) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Dann gilt

- (a) (einfach) Dann gilt $L(\gamma) \geq \|y - x\|$.
- (b) (schwierig) Gilt $L(\gamma) = \|y - x\|$, dann existiert eine monotone, stetige Abbildung $\psi: [a, b] \rightarrow [0, 1]$ mit $\psi(a) = 0$ und $\psi(b) = 1$, so dass für alle $t \in [a, b]$:

$$\gamma(t) = x + \psi(t)(y - x).$$

Skalarprodukt und Norm auf $C^0([a, b], \mathbb{R})$

Der Vektorraum $C^0([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ trägt das Skalarprodukt

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle := \int_a^b f(t)g(t) \, dt \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige Norm ist die L^2 -Norm

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt}.$$

Wie in jedem euklidischen Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle\langle f, g \rangle\rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f und g linear unabhängig sind.

Aufgabe 2. (Übung I.1.10 im Skript.) Für eine stückweise C^1 -Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definieren wir die *Energie* als

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \, dt.$$

Zeigen Sie:

- (a) $E(\gamma) \geq \frac{1}{2(b-a)} L(\gamma)^2$. *Hinweis: nutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $C^0([a, b], \mathbb{R})$ für $f(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$ und $g(t) = 1$.*
- (b) Gleichheit $E(\gamma) = \frac{1}{2(b-a)} L(\gamma)^2$ gilt genau dann, wenn $\|\dot{\gamma}(t)\|$ konstant ist. *Hinweis: Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.*
- (c) Es gelte $\gamma(a) = x \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma(b) = y \in \mathbb{R}^n$. Dann haben wir $E(\gamma) \geq \frac{1}{2(b-a)} \|y - x\|^2$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\gamma(t) = x + \frac{t}{b-a}(y - x)$.

Rechnen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 3.

Sei $t > 1$. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin(z) = t$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Kurvenintegrale berechnen

Aufgabe 4.

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z)^T \mapsto (2xy^2z^2 + 3x^2y^3z^3, 2x^2yz^2 + 3x^3y^2z^3, 2x^2y^2z + 3x^3y^3z^2)^T.$$

Ist es konservativ? Wenn ja, dann bestimmen Sie ein Potential.