Präsentation in der Vorlesung am 27.10. — Wiederholung:

Wiederholung: Konforme lineare Abbildungen

$$I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.10. *Sei $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die zugehörige Matrix. Dann sind äquivalent:*

(1) *h ist $\mathbb{C}$-linear.*

(2) *Es existiert ein $w \in \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $h(z) = wz$.*

(3) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $h(iz) = ih(z)$.*

(4) *$IA = AI$.*

(5) *Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$*

Lemma 2.11. *Sei $h\colon \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, $h \neq 0$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

(a) h ist $\mathbb{C}$-linear

$\iff$ *(b) h ist Verkettung einer zentrischen Streckung (mit Zentrum 0 und einer Drehung (mit Zentrum 0)*

$\iff$ *(c) h erhält die Winkel (=winkeltreu=konform) und die Orientierung (=orientierungserhaltend= $\det_{\mathbb{R}} h > 0$).*

Bemerkung 2.12. (Leicht modifiziert!)
Sei $h: \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linear, $h \neq 0$, mit Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist komplex anti-linear

$\overset{\text{(def)}}{\iff} \forall z, \lambda \in \mathbb{C}: \; h(\lambda z) = \overline{\lambda} h(z)$

$\iff \forall z \in \mathbb{C}: \; h(iz) = -ih(z)$

$\iff \exists w \in \mathbb{C}: \; \forall \in \mathbb{C}: \; h(z) = \overline{wz}$

$\iff AI = -IA$

$\iff \exists a, b \in \mathbb{R}: \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

$\iff h$ ist Verkettung einer Spiegelung mit einer zentrischen Streckung

$\iff h$ ist konform und orientierungsumkehrend ($=\det_{\mathbb{R}} h < 0$).

Ende der Wiederholung

2.3.3 Konformität differenzierbarer Abbildungen

Definition 2.13. *Sei Ω offen und $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar (im Sinne der Analysis II), so dass für alle $z \in \Omega$ gilt:* $\det Jf(z) \neq 0$. *Die Abbildung f ist* **winkeltreu**, *oder* **konform**, *falls für alle $z_0 \in \Omega$ die durch $Jf(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beschriebene lineare Abbildung konform ist. Die Abbildung f ist* **orientierungserhaltend** *bzw.* **orientierungsumkehrend**, *falls für alle $z_0 \in \Omega$ die lineare Abbildung $Jf(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend ist.*

Ist f konform so, dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad f'(z_0) = a + bi$$

falls f orientierungserhaltend ist und

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

im orientierungsumkehrenden Fall.

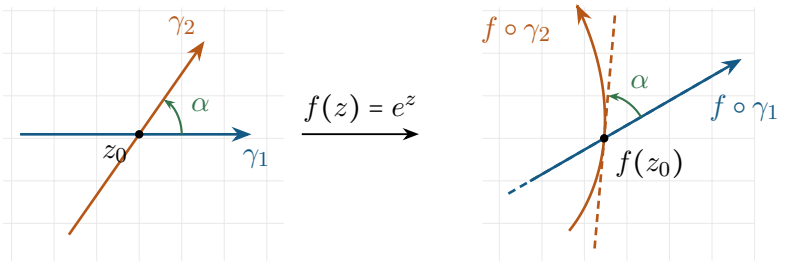

Abbildung 2.2: Winkeltreue von $f(z) = \exp(z)$ bei $z_0 = i\pi/6$. Die Geraden $\gamma_1(t) = z_0 + t$ und $\gamma_2(t) = z_0 + te^{i\alpha}$, hier mit $\alpha = 55°$, schließen denselben Winkel ein wie ihre Bildkurven. Die gestrichelten Geraden rechts sind die Bildtangenten. Da $f'(z_0) = e^{i\pi/6}$, werden beide Tangenten um 30° gedreht.

Wir haben also gesehen:

Satz 2.14 (Satz über holomorphe und konforme Funktionen)**.** *Sei $f: \Omega \to \mathbb{C}$, Ω offen in $\mathbb{C}$, f reell differenzierbar, wobei für alle $z \in \Omega$ gilt:* $\det Jf(z) \neq 0$.
Dann sind äquivalent:

(1) *f ist holomorph,*

(2) *f erfüllt die Cauchy-Riemann-Gleichungen,*

(3) *für alle $z \in \Omega$ ist $Jf(z) : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ komplex linear,*

(4) *f ist konform und orientierungserhaltend.*

Bemerkungen 2.15.

(a) Ist zusätzlich $f \in C^1$ und Ω zusammenhängend, dann ist f orientierungserhaltend genau dann, wenn es ein $z_0 \in \Omega$ gibt mit $\det_{\mathbb{R}} Jf(z_0) > 0$.

(b) Wir machen oben nur Aussagen für den Fall, dass für alle $z \in \Omega$ gilt: $\det Jf(z) \neq 0$. Insbesondere in Punkten $z \in \Omega$ mit $Jf(z) = 0$ ist eine mit der Literatur konsistente Definition derzeit zu aufwändig.

(c) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar und ist für alle $z \in \Omega$ die reelle Ableitung $Jf(z)$ komplex anti-linear, so nennt man f anti-holomorph. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt also auch: f ist anti-holomorph genau dann, wenn f konform und orientierungsumkehrend ist. die Abbildung $z \mapsto f(z)$ is anti-holomorph genau dann, wenn $z \mapsto \overline{f(z)}$ holomorph ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $z \mapsto f(\overline{z})$ holomorph ist.