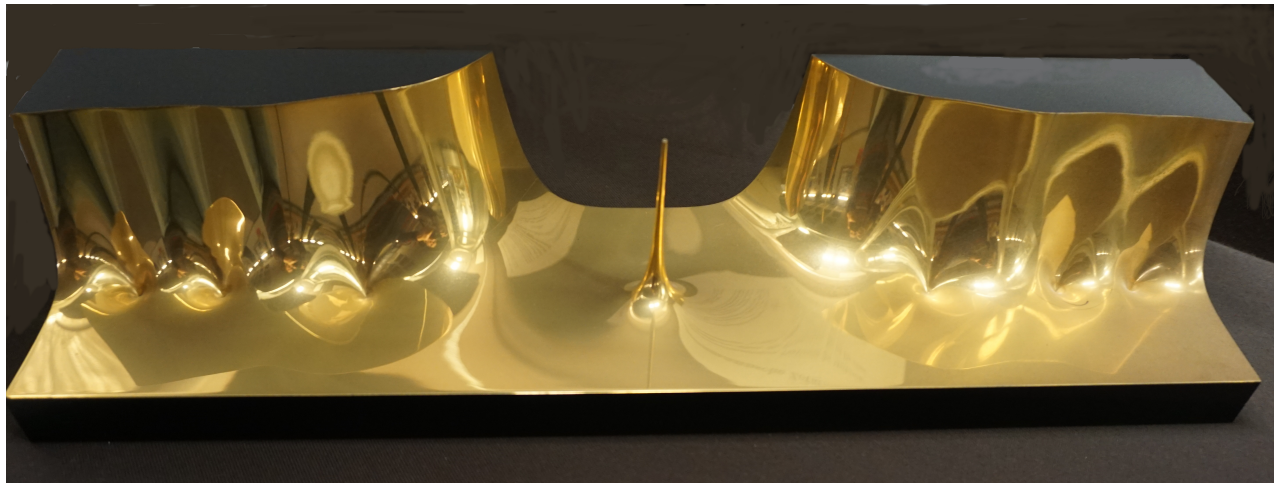


Analysis III: Maß- und Funktionentheorie

Vorlesungsskript, Wintersemester 2026/27,



©: Alle Rechte beim Fotografen Bernd Ammann

Prof. Dr. Bernd Ammann, Universität Regensburg



Breitformat

Version vom 16. Oktober 2026

Präsentation in der Vorlesung am 16.10.:

Definition 1.3. Die **(Bogen-)Länge** einer Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \mid k \in \mathbb{N} \wedge t_0, \dots, t_k \in I \wedge t_0 < t_1 < \dots < t_k \right\} \in [0, \infty].$$

Falls $L(\gamma) < \infty$, so nennt man γ **rektifizierbar**.

Satz 1.6. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve. Dann ist γ rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt.$$

Beweis „ $\leq$ “. letztes Mal.

Beweis „ $\geq$ “. Wir zeigen: zu jedem $\hat{\varepsilon} > 0$ gibt es eine Partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, so dass

$$\sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt - \hat{\varepsilon}.$$

Gefunden haben wir letzte Stunde: eine Partition $a = t_0 < \dots < t_k = b$, so dass für alle $t \in [t_{i-1}, t_i]$:

$$\|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_i)\| \leq \varepsilon \text{ und deshalb } \|\dot{\gamma}(t)\| \leq \|\dot{\gamma}(t_i)\| + \varepsilon.$$

$$\Delta t_i := t_i - t_{i-1}.$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t_i)\| dt + \varepsilon \Delta t_i = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t_i) dt \right\| + \varepsilon \Delta t_i \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\dot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)) dt \right\| + \varepsilon \Delta t_i \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)) dt \right\| + \varepsilon \Delta t_i \\ &\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)) dt \right\| + \varepsilon \Delta t_i \\ &\stackrel{(1.1)}{\leq} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right\| + \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)\| dt}_{\leq \varepsilon} + \varepsilon \Delta t_i \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)\| dt}_{\leq \varepsilon} + \varepsilon \Delta t_i \\ &\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\varepsilon \Delta t_i. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt: $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\varepsilon \triangle t_i$.

$$\begin{aligned} \implies \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt &= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\varepsilon(b-a) \\ &\leq L(\gamma) + \underbrace{2\varepsilon(b-a)}_{=:\hat{\varepsilon}} \end{aligned}$$

■

Definition 1.7. Eine Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennen wir **stückweise C^1** , falls es eine Partition $a = t_0 < \dots < t_k = b$ gibt, so dass $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ eine C^1 -Kurve für alle $i = 1, \dots, k$ ist.

Damit folgt

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Beispiel. Sei $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} (t, 0)^T, & \text{falls } t \in [0, 1] \\ (1, t-1)^T, & \text{falls } t \in [1, 2] \\ (3-t, 1)^T, & \text{falls } t \in [2, 3] \\ (0, 4-t)^T, & \text{falls } t \in [3, 4] \end{cases}$$

Die Kurve durchläuft den Rand des Einheitsquadrats $[0, 1]^2$ in $\mathbb{R}^2$, ist stückweise stetig differenzierbar und hat Bogenlänge 4.

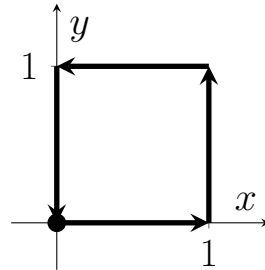


Abbildung I.1.3: Die Kurve, die den Rand von $[0, 1]^2$ durchläuft.

Bemerkung 1.8. Die Integralformel für die Bogenlänge gilt auch für (stückweise) C^1 -Kurven $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ auf beliebigen Intervallen (offen, halboffen). Eine solche Kurve muss nicht rektifizierbar sein. Falls γ nicht rektifizierbar ist, ist $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \infty$ ein uneigentliches Integral.

Übung 1.9 (Voraussichtlich Zentralübung am 20.10.). Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Dann gilt

(a) (einfach) Dann gilt $L(\gamma) \geq \|y - x\|$.

(b) (schwierig) Gilt $L(\gamma) = \|y - x\|$, dann existiert eine Reparametrisierung $\tau: [0, 1] \rightarrow [a, b]$, so dass für alle $t \in [0, 1]$:

$$\gamma \circ \tau(t) = x + t(y - x).$$

Skalarprodukt und Norm auf $C^0([a, b], \mathbb{R})$

Der Vektorraum $C^0([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ trägt das Skalarprodukt

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle := \int_a^b f(t)g(t) \, dt \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige Norm ist die L^2 -Norm

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt}.$$

Wie in jedem euklidischen Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle\langle f, g \rangle\rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f und g linear unabhängig sind.

Übung 1.10 (Voraussichtlich Zentralübung am 20.10.). Für eine stückweise C^1 -Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definieren wir die **Energie** als

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Zeigen Sie:

- (a) $E(\gamma) \geq \frac{1}{2(b-a)} L(\gamma)^2$. *Hinweis: nutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $C^0([a, b], \mathbb{R})$ für $f(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$ und $g(t) = 1$.*
- (b) Gleichheit $E(\gamma) = \frac{1}{2(b-a)} L(\gamma)^2$ gilt genau dann, wenn $\|\dot{\gamma}(t)\|$ konstant ist. *Hinweis: Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.*
- (c) Es gelte $\gamma(a) = x \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma(b) = y \in \mathbb{R}^n$. Dann haben wir $E(\gamma) \geq \frac{1}{2(b-a)} \|y - x\|^2$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\gamma(t) = x + \frac{t}{b-a}(y - x)$.

1.2 Wiederholung: (weg-)zusammenhängend (mehr dazu: Zentralüb. am 20.10.)

$U \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(1) **zusammenhängend**,

$$\iff \nexists A, B \subseteq U, \text{ nicht-leer mit } U = A \dot{\cup} B,$$

$$\iff \nexists A, B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cap U \text{ und } B \cap U \text{ nicht-leer} \\ \text{und mit } U = (A \cap U) \dot{\cup} (B \cap U).$$

Hierbei benutzen wir das Symbol $\dot{\cup}$ für die disjunkte Vereinigung von Teilmengen, das heißt $R \dot{\cup} S = T$ ist äquivalent zu $R \cup S = T$ und $R \cap S = \emptyset$.

(2) **wegzusammenhängend**, falls

$$\forall x, y \in U \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow U \text{ stetig mit } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y.$$

Es gilt immer

$$\text{wegzusammenhängend} \implies \text{zusammenhängend}.$$