Analysis III: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2026/27
Prof. Dr. Bernd Ammann, Tobias Hirsch

Abgabe bis Donnerstag, 26.11.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 7

1. Aufgabe (1+1,5+1,5 Punkte). Berechnen Sie jeweils die Windungszahl der Kurve γ für $w \in \{\pm 1, \pm i\}$.

a) $\gamma\colon [0, 6\pi] \to \mathbb{C}$
$$t \mapsto 2\cos(t) + 4i\sin(t)$$

b) $\gamma\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{C}$
$$t \mapsto 2\cos(t) + 2i\sin(2t)$$

c) $\gamma\colon [0, 4] \to \mathbb{C}$
$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(t), & \text{falls } t \in [0,1] \\ -\alpha(t-1), & \text{falls } t \in [1,2] \\ \alpha(3-t), & \text{falls } t \in [2,3] \\ -\alpha(4-t), & \text{falls } t \in [3,4] \end{cases}$$
mit $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}$
$$t \mapsto 5 \cdot e^{10\pi i t} - 5$$

2. Aufgabe (1+1+2 Punkte). Drücken Sie für die folgenden Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ und jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ das Integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ durch Windungszahlen $\mathcal{W}(\gamma, w)$ mit $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ aus.

a) $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

b) $\Omega\colon \mathbb{C} \setminus \{-3\}$, $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z+3)^2}$

c) $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z-1)}$

Hinweis: Betrachten Sie mithilfe des Pozenzreihenentwicklungssatzes die Potenzreihenentwicklungen vom Zähler bei den Nullstellen des Nenners.

3. Aufgabe (4 Punkte). Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie,[1] dass es eine holomorphe Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f = e^g$ gibt.
Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass auch $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Zeigen Sie dann, dass $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion auf Ω besitzt.

4. Aufgabe (4 Punkte). Zeigen Sie:[2] Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist entweder konstant, oder ihr Bild liegt dicht in $\mathbb{C}$ (d.h. der Abschluss $\overline{f(\mathbb{C})}$ ist ganz $\mathbb{C}$).
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$ für ein geeignetes $a \in \mathbb{C}$.

[1] Sie dürfen für diese Aufgabe Prop. 4.8 im Skript nutzen, die am Freitag 20.11. behandelt wird.

[2] Sie dürfen für diese Aufgabe den Satz von Liouville (Satz 4.9 im Skript) nutzen, der am Freitag 20.11. behandelt wird.