Analysis III: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2026/27
Prof. Dr. Bernd Ammann, Tobias Hirsch

Abgabe bis Donnerstag, 19.11.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 6

1. Aufgabe (4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ eine stetige Kurve. Zeigen Sie:

a) Die Kurve $\gamma \cdot (-\gamma)\colon [0,1] \to \Omega$ definiert durch

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t), & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2-2t), & \text{falls } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ist homotop bezüglich der Endpunkte zur konstanten Kurve bei $\gamma(0)$.

b) Ist $\tau\colon [0,1] \to \Omega$ eine Kurve mit denselben Endpunkten wie γ, und ist Ω einfach zusammenhängend bezüglich $\gamma(0) = \tau(0)$, dann sind γ und τ homotop mit festen Endpunkten.

2. Aufgabe (4 Punkte). Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma, \tau\colon [0,1] \to \Omega$ geschlossene, stetig differenzierbare Kurven. Sei zudem $H\colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ eine Homotopie von γ nach τ, sodass

- für alle $t \in [0,1]$ gilt $H(0,t) = H(1,t)$, und
- die Kurve $\sigma\colon [0,1] \to \Omega,\ \sigma(t) \coloneqq H(0,t)$ ist stetig differenzierbar.

Zeigen Sie:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\tau f(z)\, dz.$$

Hinweis: Konstruieren Sie eine Homotopie mit festen Endpunkten von $\gamma \cdot \sigma$ nach $\sigma \cdot \tau$.