Analysis III: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2026/27
Prof. Dr. Bernd Ammann, Tobias Hirsch

Abgabe bis Donnerstag, 12.11.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 5

1. Aufgabe (4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ seien analytische Funktionen mit $f' = fg$. Zeigen Sie: Hat f eine Nullstelle in Ω, so ist $f(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$.

2. Aufgabe (2+2 Punkte + 2 Bonuspunkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine zweimal differenzierbare Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, falls $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ für alle $x + iy \in \Omega$.

a) Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, sodass die Funktionen $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$ zweimal differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass u und v harmonisch sind.

b) Sei Ω sternförmig. Zeigen Sie, dass jede harmonische Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ der Realteil einer holomorphen Funktion ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^2,\ Y(x,y) := \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)^\top$$

konservativ ist.

(∗) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x + iy &\mapsto \frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

harmonisch, aber nicht Realteil einer holomorphen Funktion ist.

3. Aufgabe (1+2+1 Punkte). Für $w \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir die geschlossene Kurve $\gamma_{r,w}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{r,w}(t) = w + re^{it}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_{r,0}} \frac{5z}{(z+1)(z-1+i)}\, dz \qquad (*)$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1, \sqrt{2}\}$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:[1]

a) Seien $v, w \in \mathbb{C}$ und $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{v + \lambda(w - v) \mid \lambda \in [0,1]\}$. Sei $\operatorname{Log}\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \Omega &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \operatorname{Log}\left(\frac{z-w}{z-v}\right) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist, und für $z \in \Omega$

$$f'(z) = \frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-v}.$$

[1] In dieser Aufgabe dürfen Sie folgende Aussage verwenden, welche am Freitag in der Vorlesung bewiesen wird: Ist $l\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ein Zweig der Logarithmus-Funktion, dann gilt $l'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \Omega$.

b) Seien $v, w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{|v-w|\}$. Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma_{r,w}} \frac{1}{z-v}\, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } |v-w| < r \\ 0 & \text{falls } |v-w| > r. \end{cases}$$

Hinweis: Folgern Sie aus a), dass für $|v-w| < r$

$$\int_{\gamma_{r,w}} \frac{1}{z-v}\, dz = \int_{\gamma_{r,w}} \frac{1}{z-w}\, dz.$$

c) Verwenden Sie b) um $(*)$ zu bestimmen.
Hinweis: Finden Sie komplexe Zahlen $A, B \in \mathbb{C}$, sodass

$$\frac{5z}{(z+1)(z-1+i)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1+i}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1-i\}$ gilt.

4. Aufgabe (1+1+2 Punkte + 2 Bonuspunkte). Gegeben seien die komplexen Potenzreihen

$$E(z) \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j \quad \text{und} \quad L(z) \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} z^j$$

a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien dieser Potenzreihen. Begründen Sie, dass $L \circ E$ eine wohldefinierte, analytische Funktion auf $U \coloneqq E^{-1}(B_1(0))$ ist.

b) Berechnen Sie die Ableitung $L \circ E$ auf U.
Hinweis: Vereinfachen Sie L' mithilfe der geometrischen Reihe.

c) Zeigen Sie, dass E die Teilmenge $V \coloneqq \{s + i\phi \mid s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), s < \log(2\cos(\phi))\}$ surjektiv nach $B_1(0)$ abbildet.

$(*)$ Zeigen Sie, dass $L\colon B_1(0) \to V$ eine holomorphe Funktion mit holomorpher Umkehrabbildung definiert.