Analysis III: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2026/27
Prof. Dr. Bernd Ammann, Tobias Hirsch

Abgabe bis Donnerstag, 05.11.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 4

1. Aufgabe (4 Punkte). Begründen Sie, dass die folgenden Funktionen in 0 analytisch sind, und bestimmen Sie ihre Potenzreihe im Entwicklungspunkt 0 bis zur Ordnung z^3:

a) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C},\ f(z)=\dfrac{e^z}{1-z}$

b) $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=e^{\sin(z)}$

c) $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\begin{cases}\frac{\sin(z)}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$

d) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{z\neq 0 \mid \sin(z)=0\}\to\mathbb{C},\ f(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sin(z)}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$

2. Aufgabe (4 Punkte). Sei $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ offen, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit stetiger Ableitung und $f'(z)\neq 0$ für alle $z\in\Omega$. Zeigen Sie:

a) Für alle $z\in\Omega$ existiert eine offene Umgebung U von z in Ω und eine offene Umgebung V von $f(z)$, sodass $f|_U\colon U\to V$ ein Diffeomorphismus ist.

b) Die Umkehrabbildung $(f|_U)^{-1}\colon V\to U$ ist holomorph.

Bemerkung (nicht Teil der Aufgabe): Später wird in der Vorlesung gezeigt werden, dass die Ableitung einer holomorphen Funktion $\Omega\to\mathbb{C}$ immer stetig ist.

3. Aufgabe (4 Punkte). Gegeben sei die Potenzreihe $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Zeigen Sie:

a) Der Konvergenzradius von f ist 1.

b) Für $k\in\mathbb{N}$ und $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|<1$ gilt $|f(z^{2^k})|\leq|f(z)|+k$.

c) Sei $k\in\mathbb{N}$ und ρ eine 2^k-te Einheitswurzel. Dann gilt $\lim\limits_{t\nearrow 1}|f(t\rho)|=\infty$.

d) Für keinen Punkt z des Randes seines Konvergenzgebietes ist f auf eine offene Umgebung von z holomorph fortsetzbar.

4. Aufgabe (4 Punkte). Sei Ω ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) $\operatorname{Re} f$ ist konstant

(ii) $\operatorname{Im} f$ ist konstant

(iii) $|f|$ ist konstant

(iv) $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$

(v) f ist konstant

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy–Riemann-Gleichungen. Berechnen Sie bei (iii) $\Rightarrow$ (iv) die Ableitung von $|f|^2$ mithilfe der (reellen) Kettenregel.