

Übungsblatt 3

1. Aufgabe (4 Punkte). Prüfen Sie jeweils, ob das Vektorfeld Y auf dem Gebiet Ω konservativ ist.

a) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x < 0\}$ und $Y(x, y) = \begin{pmatrix} e^x(y^2 + 1) \\ 2ye^x + x \end{pmatrix}$

b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ und $Y(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, \lambda, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $Y(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + (z-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1-z \\ y^2 \\ x \end{pmatrix}$

d) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\lambda, -\lambda) \mid \lambda \geq 0\}$ und $Y(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

2. Aufgabe (1+2+1=4 Punkte). Seien $\Omega, \widehat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete und $f: \widehat{\Omega} \rightarrow \Omega$ ein C^2 -Diffeomorphismus. Für ein C^1 -Vektorfeld $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten wir das C^1 -Vektorfeld

$$f^*Y: \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto f'(x)^T \cdot Y(f(x)).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Sei $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Für jede C^1 -Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \widehat{\Omega}$ gilt

$$\int_{\gamma} f^*Y = \int_{f \circ \gamma} Y.$$

b) Ist $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld mit

$$\forall j, k \in \{1, \dots, n\}: \quad \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_k},$$

so gilt diese Bedingung auch für f^*Y .

Hinweis: Wollen Sie längere Rechnungen vermeiden, nutzen (und beweisen) Sie folgende Beobachtung: Für alle $x \in \widehat{\Omega}$ existiert eine sternförmige offene Umgebung U , sodass $f(U)$ in einer sternförmigen offenen Teilmenge von Ω enthalten ist.

c) Sei $\widehat{\Omega}$ ist sternförmig. Jedes C^1 -Vektorfeld $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\frac{\partial Y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_k}$$

ist konservativ.

Bemerkung: Es ist also zu zeigen, dass das Poincaré-Lemma für Ω gilt.