

Präsenzübungsblatt

1. Aufgabe (0 Punkte). Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit Länge $L = L(\gamma)$. Zudem gelte $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$. Zeigen Sie:

- a) Die **Bogenlängenfunktion** $B_\gamma: [a, b] \rightarrow [0, L], s \mapsto \int_a^s \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ ist stetig differenzierbar.
- b) Die Funktion B_γ ist streng monoton steigend. Nutzen Sie dies um zu zeigen, dass die Funktion $B_\gamma: [a, b] \rightarrow [0, L]$ bijektiv ist.
- c) Die Umkehrfunktion $B_\gamma^{-1}: [0, L] \rightarrow [a, b]$ ist stetig differenzierbar.
- d) Sei $\tilde{\gamma} := \gamma \circ B_\gamma^{-1}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie $\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|$ für alle $t \in (0, L)$.

2. Aufgabe (0 Punkte).

- a) Sei $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine C^1 -Kurve. Sei $\tau: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Reparametrisierung.

Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma \circ \tau} Y = \begin{cases} \int_\gamma Y & \dot{\tau} > 0 \\ -\int_\gamma Y & \dot{\tau} < 0. \end{cases}$$

- b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Sei $\tau: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\tau(c) = a$ und $\tau(d) = b$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma \circ \tau} f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$$

für alle stetigen Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ gilt.

Übungsblatt 1

1. Aufgabe (4 Punkte). Finden Sie alle Nullstellen von

$$P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$x \mapsto x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $P(e^{\frac{2\pi i k}{5}}) = 0$ für $k = 1, 2$.

2. Aufgabe (4 Punkte). Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie ihre Länge:

a) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^\top$, wobei $r \in \mathbb{R}_+$. (*Zykloide*)

b) $\gamma: [0, \sqrt{13}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)^\top$. (*Neilsche Parabel*)

c) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = ((1 - \sin t) \cos t, (1 - \sin t) \sin t)^\top$. (*Kardioide*)

d) $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^\top$, wobei $r, h \in \mathbb{R}_+$. (*Helix*)

Übungsblatt 2

1. Aufgabe (4 Punkte).¹

- a) Es seien $Y: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (xy, x^2, x - z)^\top$ ein Vektorfeld, γ_1 die Gerade von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 4)$ und $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t^2, 2t^3, 4t)$ eine Kurve. Berechnen und vergleichen Sie die Kurvenintegrale $\int_{\gamma_1} Y$ und $\int_{\gamma_2} Y$.
- b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $Y: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + yz, y + xz, z + xy)^\top$ konservativ ist, indem Sie ein Potential $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(0) = 0$ bestimmen.
Hinweis: folgen Sie dem Beweis von Satz 1.16 (4) $\Rightarrow$ (1), um ein geeignetes ϕ zu erraten. Prüfen Sie dann, ob dies ein Potential ist.
Berechnen Sie damit das Kurvenintegral $\int_{\gamma} Y$ entlang einer von Ihnen gewählten C^1 -Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, die den Punkt $(0, 0, 0)$ mit $(1, 1, 1)$ verbindet. Ist das Ergebnis von der Wahl der Kurve abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe (4 Punkte). Bestimmen Sie jeweils alle:

- a) $a \in \mathbb{C}$, sodass mit z auch $\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ auf dem Einheitskreis liegt.
- b) $z \in \mathbb{C}$ mit $\bar{z} = z^2$.
- c) Lösungen von $z^5 = 3 - i\sqrt{3}$.

3. Aufgabe (4 Punkte). Ein topologischer Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn für alle $p \in X$ und jede Umgebung U von p eine kompakte Umgebung V von p existiert, die in U enthalten ist. Für einen lokal kompakten Hausdorff-Raum X ist die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* (oder *Alexandroff-Kompaktifizierung*) die Menge $\hat{X} = X \sqcup \{\infty\}$ mit folgender Topologie: $U \subset \hat{X}$ ist genau dann offen, wenn $U \subset X$ offen oder $\hat{X} \setminus U \subset X$ kompakt ist.

- a) Zeigen Sie, dass die Ein-Punkt-Kompaktifizierung einen kompakten Hausdorff-Raum definiert.
- b) Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen lokal kompakten Hausdorff-Räumen betrachten wir die induzierte Abbildung $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ mit $\hat{f}|_X = f$ und $\hat{f}(\infty) = \infty$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ genau dann stetig ist, wenn f *eigentlich* ist, d.h. wenn unter f Urbilder von Kompakta stets wieder kompakt sind.

¹Diese Aufgabe basiert auf Inhalten der Vorlesung vom 16.10., also des Tages nach der Veröffentlichung dieses Blatts. Sie wurde am 16.10. angepasst. Dies ließ sich leider nicht vermeiden.

4. Aufgabe (4 Punkte).

- a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}$ eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass G entweder zyklisch ist, oder der Abschluss von $G \subseteq \mathbb{R}$ ganz $\mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie das Infimum der positiven Elemente von G .

- b) Folgern Sie daraus: Ist zusätzlich $\mathbb{Z} \subseteq G$, so ist G entweder zyklisch mit Erzeuger $\frac{1}{k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, oder der Abschluss von G ist $\mathbb{R}$.

- c) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Bestimmen Sie den Abschluss von $\{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

Hinweis: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $t \mapsto e^{2\pi i \cdot t}$ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

Übungsblatt 3

1. Aufgabe (4 Punkte). Prüfen Sie jeweils, ob das Vektorfeld Y auf dem Gebiet Ω konservativ ist.

a) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x < 0\}$ und $Y(x, y) = \begin{pmatrix} e^x(y^2 + 1) \\ 2ye^x + x \end{pmatrix}$

b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ und $Y(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, \lambda, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $Y(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + (z-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1-z \\ y^2 \\ x \end{pmatrix}$

d) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\lambda, -\lambda) \mid \lambda \geq 0\}$ und $Y(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

2. Aufgabe (1+2+1=4 Punkte). Seien $\Omega, \widehat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete und $f: \widehat{\Omega} \rightarrow \Omega$ ein C^2 -Diffeomorphismus. Für ein C^1 -Vektorfeld $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten wir das C^1 -Vektorfeld

$$f^*Y: \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto f'(x)^T \cdot Y(f(x)).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Sei $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Für jede C^1 -Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \widehat{\Omega}$ gilt

$$\int_{\gamma} f^*Y = \int_{f \circ \gamma} Y.$$

b) Ist $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld mit

$$\forall j, k \in \{1, \dots, n\} : \quad \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_k},$$

so gilt diese Bedingung auch für f^*Y .

Hinweis: Wollen Sie längere Rechnungen vermeiden, nutzen (und beweisen) Sie folgende Beobachtung: Für alle $x \in \widehat{\Omega}$ existiert eine sternförmige offene Umgebung U , sodass $f(U)$ in einer sternförmigen offenen Teilmenge von Ω enthalten ist.

c) Sei $\widehat{\Omega}$ ist sternförmig. Jedes C^1 -Vektorfeld $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\frac{\partial Y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_k}$$

ist konservativ.

Bemerkung: Es ist also zu zeigen, dass das Poincaré-Lemma für Ω gilt.