

Proseminar: Grundlagen der Mathematik

Sommersemester 2026

Prof. Bernd Ammann, Roman Schießl

Mittwoch 16-18 in M103

Vortrag Nr. 1: Mengen und Klassen. [FP85, Kap. 1]

Vortrag Nr. 2: Relationen und Funktionen. [FP85, Kap. 2]

Vortrag Nr. 3: Natürliche Zahlen. [FP85, Kap. 3]

Vortrag Nr. 4: Ganze und rationale Zahlen. [FP85, Kap. 4]]

Vortrag Nr. 5: Reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. [FP85, Kap. 5] Wir führen hier den Körper der reellen Zahlen ein, indem wir Cauchy-Folgen betrachten. Eine alternative Quelle ist der Anhang C im Analysis-Skript von Bernd Ammann [Amm26]. Wenn keine Zeit mehr verbleibt für die komplexen Zahlen (auch in [FP85, Kap. 5]), dann diese weglassen.

Vortrag Nr. 6: Reelle Zahlen als Dedekindsche Schnitte. Das Thema dieses Vortrags ist ein alternativer Zugang zu den reellen Zahlen. Wir führen reelle Zahlen durch Dedekindsche Schnitte ein, siehe Anhang D im Analysis-Skript von Bernd Ammann [Amm26]. Wenn Zeit bleibt sollte die Sprecherin oder der Sprecher auf den Zugang mittels Intervallschachtelung eingehen (siehe [Ebb92], in der 3. Ausgabe ist es Kap. 2 Reelle Zahlen §4 Intervallschachtelung, in neueren evtl. anders).

Vortrag Nr. 7: Wohlordnungen. [FP85, Kap. 6]

Vortrag Nr. 8: Ordinalzahlen. [FP85, Kap. 7]

Vortrag Nr. 9: Ordinalzahlarithmetik und von Neumannsche Stufen. [FP85, Kap. 8]

Vortrag Nr. 10: Das Auswahlaxiom. [FP85, Kap. 9]

Vortrag Nr. 11: Anwendungen des Auswahlaxioms. [FP85, Kap. 10]

Vortrag Nr. 11a: Das Banach–Tarski-Paradoxon, Teil 1
Hauptquelle [Run02, Chapter 0.1]

- Stellen Sie kurz den Bezug des Banach–Tarski-Paradoxons zum Auswahlaxiom dar.
- Geben Sie dann die Definition der Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge X durch einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : G \rightarrow \text{Bij}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}, \quad (1)$$

sodass für $g \in G$ und $x \in X$ dann

$$g \cdot x := \Phi(g)(x) \quad (2)$$

und geben Sie für $x \in X$ die Definition des Orbits

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}. \quad (3)$$

Besprechen Sie sodann die Beispiele in [Run02, Chapter 0.1] nach Ex. 0.1.1.

- Führen Sie freie Gruppen als Gruppen reduzierter Wörter ein [Lö17, Chapter 3.3.1 Def. 3.3.4 und Prop. 3.3.5(1.)].
- Definieren Sie paradoxe Zerlegungen von Mengen mit Gruppenwirkung und paradoxe Gruppen. Geben Sie endliche Gruppen als einfaches Gegenbeispiel.
- Zeigen Sie, dass die freie Gruppe in zwei Erzeugern \mathbb{F}_2 paradox ist.
- Beweisen Sie [Run02, Chapter 0.1 Prop. 0.1.3] und gehen Sie dabei besonders auf die Rolle des Auswahlaxioms ein.
- Motivieren und beweisen Sie (vielleicht nur skizzenhaft) [Run02, Chapter 0.1 Theo. 0.1.4].
- Beweisen Sie schließlich das Hausdorff-Paradoxon.

Vortrag Nr. 11b: Das Banach–Tarski-Paradoxon, Teil 2

Vollenden Sie durch die ausführliche Darstellung des verbleibenden Teils von [Run02, Chapter 0.1] den Beweis des schwachen und des (starken) Banach–Tarski-Paradoxons. Diskutieren Sie, inwiefern das Auswahlaxiom essenziell für das Banach–Tarski-Paradoxon ist und wieso im Allgemeinen abgelehnt wird, das Paradoxon zum Anlass zu nehmen, das Auswahlaxiom zu verwerfen. Quellen hierfür sind [Ebb77, Kap. VIII.3 und Abschnitt XIII] sowie [Sol70].

Vortrag Nr. 12: Mächtigkeiten und Kardinalzahlen. [FP85, Kap. 11]

Vortrag Nr. 13: Kardinalzahlarithmetik. [FP85, Kap. 12]

Vortrag Nr. 14: Das Kontinuum. [FP85, Kap. 13]

Web-Links

Web-Seite des Seminars:

[https:](https://ammann.app.uni-regensburg.de/lehre/2026s_prosem_grundlagen)

[//ammann.app.uni-regensburg.de/lehre/2026s_prosem_grundlagen](https://ammann.app.uni-regensburg.de/lehre/2026s_prosem_grundlagen)

Liste der vergebenen Vorträge:

https://ammann.app.uni-regensburg.de/lehre/2026s_prosem_grundlagen/nds/vortragsliste.html

Literatur

- [Amm26] AMMANN, Bernd: Analysis I. 2026. – Vorlesungsskript, Universität Regensburg, WS 2025–2026. – https://ammann.app.uni-regensburg.de/lehre/2026s_prosem_grundlagen/nds/AnalysisI-Skript-WS2025-26.pdf
- [Ebb77] EBBINGHAUS, Heinz-Dieter: Einführung in die Mengenlehre. 1. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1977 (Die Mathematik)
- [Ebb92] EBBINGHAUS ET AL., Heinz-Dieter: Zahlen. 3. Springer, 1992 (Grundwissen Mathematik)
- [FP85] FRIEDRICHS DORF, U. ; PRESTEL, A.: Mengenlehre für den Mathematiker. 1. Vieweg und Teubner Verlag, 1985 (Grundkurs Mathematik)
- [Lö17] LÖH, Clara: Geometric Group Theory. An Introduction. 1. Springer Cham, 2017 (Universitext)
- [Run02] RUNDE, Volker: Lecture Notes in Mathematics. Bd. 1774: Lectures on Amenability. 1. Springer Berlin, Heidelberg, 2002
- [Sol70] SOLOVAY, Robert M.: A Model of Set-Theory in Which Every Set of Reals is Lebesgue Measurable. 1970. – Annals of Mathematics, Vol. 92, No. 1 (Jul., 1970), pp. 1-56 (56 pages). – <https://www.jstor.org/stable/1970696>, <https://doi.org/10.2307/1970696>