

Zentralübung Analysis II

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 1.

Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $(-x_1, x_2) \in U$ für alle $(x_1, x_2) \in U$ sei

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

eine stetig differenzierbare Abbildung so, dass

$$\left. \begin{aligned} f_1(-x_1, x_2) &= -f_1(x_1, x_2) \\ f_2(-x_1, x_2) &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (+)$$

für alle $(x_1, x_2) \in U$ erfüllt ist.

- (a) Sei $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2)^T \mapsto (x_1, 1)^T$. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ die Bedingung (+) erfüllt. Bestimmen Sie die Integralkurven des Vektorfelds $\tilde{f}$ (inklusive maximales Lösungsintervall) und skizzieren Sie sie.
- (b) Sei f eine beliebige C^1 -Funktion, die (+) erfüllt. Zeigen Sie: ist $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$, eine Integralkurve von f auf einem offenen Intervall I um die $0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(0) = 0$, so gilt $\varphi_1(t) = 0$ für alle $t \in I$.
(Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie und Picard-Lindelöf)

Aufgabe 2.

Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \frac{xt}{\sqrt{2x^2t^2+1}}$.

- (a) Zeigen Sie, dass f beschränkt und lokal Lipschitz-stetig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Differentialgleichung $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ eine eindeutige Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit maximalem Lösungsintervall $I = (t_{\min}; t_{\max})$ besitzt.
- (c) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \in (0; \infty)$ gibt mit $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq C \cdot |t - s|$ für alle $t, s \in I$.
- (d) Zeigen Sie, dass $t_{\max} = \infty$ gilt.
(Anleitung: nehmen Sie an, dass $t_{\max} < \infty$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (c), dass für jede Folge $(t_k)_k$ aus I mit $t_k \nearrow t_{\max}$ die Folge $(\varphi(t_k))_k$ eine Cauchy-Folge ist. Zeigen Sie dann, dass $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \varphi(t)$ existiert und folgern Sie die Behauptung.

Aufgabe 3.

Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokal Orts-Lipschitz-stetige und stetige Abbildung mit

$$f(-t, -x) = f(t, x)$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Für ein $T \in (0; \infty)$ sei $\varphi: (-T; T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ mit $\varphi(0) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi(-t) = -\varphi(t)$$

für alle $t \in (-T; T)$ gilt.

(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $t \mapsto -\varphi(-t)$.)

Aufgabe 4.

- a) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \varphi(t).$$

- b) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\varphi''(t) = -3\varphi'(t) - 2\varphi(t).$$

Dabei sollen Sie klar begründen, wieso es keine weiteren als von Ihnen angegebenen Lösungen gibt.

(Hinweis: Suchen Sie nach Lösungen der Form $t \mapsto e^{\lambda t}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = ty^2, \quad y(0) = 1.$$

Ist dies (bis auf Restriktion des Definitionsbereichs) die einzige Lösung?

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die Menge aller auf $\mathbb{R}$ definierten Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$y' = ty + t.$$

Aufgabe 7.

- a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}$.
(Zur Erinnerung: $\arcsin$ ist die Umkehrfunktion von $\sin: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1)$.)

- b) Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es sei $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $(t_0, x_0) \in D := \{(t, x) \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right), \quad x(t_0) = x_0. \quad (*)$$

Zeigen Sie: $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ genau dann, wenn $z: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $z(t) := \frac{x(t)}{t}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(t) = \frac{g(z(t)) - z(t)}{t}, \quad z(t_0) = \frac{x_0}{t_0} \quad (**)$$

ist.

- c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \sqrt{1 - \frac{x(t)^2}{t^2}}, \quad x(2) = 1.$$

Aufgabe 8.

Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung

$$tx'(t) + x(t) = 2t \cos(t^2), \quad t > 0.$$

Als Definitionsbereich wählen Sie bitte den maximalen Definitionsbereich innerhalb von $\mathbb{R}_{>0}$ (bitte ebenfalls angeben).

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x'(t) \cdot t \cdot \log(t) + (t \cdot x(t) - 1) \cdot x(t) = 0, \quad t > 1.$$

Aufgabe 9.

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen $x: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x(2) = 0$.
- b) Bestimmen Sie alle Lösungen mit $x(e) = \frac{1}{e}$ auf dem maximalen Definitionsintervall innerhalb von $(1, \infty)$. Dieses maximalen Definitionsintervall ist anzugeben und zu begründen.

Hinweise: Dividieren Sie zunächst durch $(x(t))^2$ und substituieren Sie $y(t) := -\frac{1}{x(t)}$, um eine lineare Differentialgleichung zu erhalten. Berechnen Sie $\frac{d}{dt} \log(\log t)$.

Aufgabe 10.

Berechnen Sie $\exp(At)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Weitere gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 11.

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

$$\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 2\varphi(t) = e^{-t} \cos(2t) .$$

$$\varphi'(t) - \varphi(t) = e^{at}, \quad \varphi(b) = c .$$

Aufgabe 12.

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie auch das maximale Lösungsintervall an:

$$(\cos t)\varphi'(t) - (\sin t)\varphi(t) + \cos t = 0$$

$$t^3\varphi'(t) + 4(1 - t^2)\varphi(t) = 0$$

$$(\tan t)\varphi'(t) + \varphi(t) = \sin t$$