

Zentralübung Analysis II

Lagrange-Multiplikatoren

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - y^2 + 3x.$$

Aufgabe 2.

¹ Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$.

Übungen aus dem Skript

Aufgabe 3. (Übung X.4.5 im Skript.) (Nutzt den Satz von Picard-Lindelöf, Satz 5.3) Sei $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $E: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist E genau dann eine Erhaltungsgröße von Y , wenn ²

$$Y(x) \in \ker E'(x)$$

für alle $x \in U$.

Lösung. Es gelte $Y(x) \in \ker E'(x)$ für alle $x \in U$. Sei $\varphi: (a, b) \rightarrow U$ eine Flusslinie von Y , dann gilt

$$(E \circ \varphi)'(t) = E'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = E'(\varphi(t)) \cdot Y(\varphi(t)) = 0.$$

Also ist E eine Erhaltungsgröße.

Umgekehrt sei E eine Erhaltungsgröße. Da Y stetig differenzierbar ist, ist Y Orts-Lipschitz-stetig. Zu jedem $x_0 \in U$ existiert also nach dem Satz von Picard-Lindelöf ein $\epsilon > 0$ und eine Flusslinie $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ von Y mit $\varphi(0) = x_0$. Da $E \circ \varphi$ konstant ist, rechnen wird

$$0 = (E \circ \varphi)'(0) = E'(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0) = E'(x_0) \cdot Y(x_0).$$

Somit gilt $Y(x_0) \in \ker E'(x_0)$ für alle $x_0 \in U$. □

¹Aufgabe spontan gestellt und gerechnet, ich hoffe die Wiedergabe der Aufgabe ist korrekt.

²Hier wird $E'(x)$ als lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet. Wenn wir $E'(x)$ als Zeilenvektor betrachten, heißt die analoge Aussage $(E'(x))^T \perp Y(x)$ oder äquivalent $E'(x) \cdot Y(x) = 0$.

Aufgabe 4. (Übung X.4.6 im Skript.) (Nutzt den Satz von Picard-Lindelöf, Satz 5.3) Sei M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, $M \subset U$, U offen in $\mathbb{R}^n$ und sei M abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Sei $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Ist Y tangential an M (d.h. es gelte $Y(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$) und ist $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Integralkurve von Y mit $a < t_0 < b$ und $c(t_0) \in M$, so ist $c(t) \in M$ für alle $t \in (a, b)$.

Lösung. Da c eine Flusslinie ist, löst es $c'(t) = Y(c(t))$, und die Eigenschaft, Lösung zu sein, beinhaltet, dass c differenzierbar ist. Es folgt dann auch sofort, dass c stetig differenzierbar ist. Wir definieren $I := \{t \in (a, b) \mid c(t) \in M\} = c^{-1}(M) \ni t_0$. Da c stetig ist und M abgeschlossen ist, ist I abgeschlossen in (a, b) . Wir zeigen nun, dass I offen in (a, b) ist. Da (a, b) zusammenhängend ist, folgt dann $I = (a, b)$, also die Aussage.

Sei $t_1 \in I$. Da M eine Untermannigfaltigkeit ist, $m := \dim M$, gibt es eine offene Menge V in $\mathbb{R}^n$ mit $c(t_1) \in M \cap V$ und eine stetig differenzierbare Untermannigfaltigkeitskarte $\Phi : V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Für $t \in J := c^{-1}(V)$ definieren wir $\psi(t) := \Phi \circ c(t)$. Wir rechnen

$$\psi'(t) = (\Phi \circ c)'(t) = \Phi'(c(t)) \cdot c'(t) = \Phi'(\Phi^{-1}(\psi(t))) \cdot Y(\Phi^{-1}(\psi(t))) = \tilde{Y}(\psi(t)),$$

wobei $\tilde{Y} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\tilde{Y}(y) = \Phi'(\Phi^{-1}(y)) \cdot Y(\Phi^{-1}(y))$ definiert ist. Man sieht leicht, dass $\tilde{Y}$ ebenfalls Lipschitz-stetig ist. Für $y \in W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ gilt $Y(\Phi^{-1}(y)) \in T_{\Phi^{-1}(y)} M$ und deswegen $\tilde{Y}(y) = \Phi'(\Phi^{-1}(y)) \cdot Y(\Phi^{-1}(y)) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Also können wir $\psi'(t) = \tilde{Y}(\psi(t))$ als gewöhnliche Differentialgleichung auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ansehen. Obiges $\psi = \Phi \circ c$ ist eine Lösung und auf Grund der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf ist diese Lösung eindeutig (für jede Anfangsbedingung in t_1). Daraus ergibt sich $\psi(t) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ für t nahe t_1 . Also auch $\varphi(t) \in M$. $\square$

Mehr gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 5.

Sei I ein Intervall und $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Lösungen von φ von

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t)$$

mit $\varphi(t_0) = x_0$. Geben Sie das maximale Lösungsintervall an.

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie alle Lösungen von φ von

$$\varphi'(t) = \pi\left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t\right)(4 + \varphi(t)^2)$$

mit $\varphi(0) = 0$. Geben Sie das maximale Lösungsintervall an.

Aufgabe 7.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Lösungen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit maximalem Lösungs-Intervall der Gleichung

$$\varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) = 0.$$

(Tipp: Versuchen Sie den Ansatz $\varphi(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$)

Aufgabe 8.

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

$$\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 2\varphi(t) = e^{-t} \cos(2t) .$$

$$\varphi'(t) - \varphi(t) = e^{at}, \quad \varphi(b) = c .$$

Aufgabe 9.

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie auch das maximale Lösungsintervall an:

$$(\cos t)\varphi'(t) - (\sin t)\varphi(t) + \cos t = 0$$

$$t^3\varphi'(t) + 4(1 - t^2)\varphi(t) = 0$$

$$(\tan t)\varphi'(t) + \varphi(t) = \sin t$$