Zentralübung Analysis II

Lokaler Umkehrsatz

Aufgabe 1.
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2 - x - 2, 3y)$. Bestimmen Sie die Menge der Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen f lokal invertierbar ist, d.h., so dass eine offene Umgebung U von (x,y) im $\mathbb{R}^2$ mit $f_{|U}$ invertierbar existiert.

Satz über implizite Funktionen

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$z^3 + z + xy = 1$$

im $\mathbb{R}^3$ genau eine Lösung $z = g(x,y)$ besitzt. Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $g'(1,1)$.

Reguläre Werte und Untermannigfaltigkeiten

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie die regulären Werte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2} - 8x^2 + 4y^4.$$

Aufgabe 4.
Zeigen Sie, dass die Teilmengen

$$C_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = |y|\right\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ und } C_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = y\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

keine Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ sind.