

Zentralübung Analysis II

Lösungsnotizen bedeutet auf diesem Blatt, dass es Notizen für mich sind, die ich mit Ihnen teile. Das ist aber weit weg von dem, was man unter einer Lösung der Aufgabe versteht.

Ableitungen allgemein

Aufgabe 1.

Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n . Für eine reelle $n \times n$ -Matrix A betrachten wir die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p, A \cdot p \rangle.$$

Zeigen Sie, dass f zweimal differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(p)$ und $f''(p)$ in jedem $p \in \mathbb{R}^n$.

Lösungsnotizen.

$$\begin{aligned} f(p) &= p^T A p, \\ f'(p) &= p^T A + p^T A^T, \\ (f'(p))^T &= A^T p + A p, \\ f''(p) &= A^T + A. \end{aligned}$$

Alternativer Weg:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}, & p &\mapsto \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} \\ G: \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R}, & \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} &\mapsto \langle p, A \cdot p \rangle. \\ f &= G \circ F \end{aligned}$$

$$F'|_p = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

$$F''|_p = 0$$

$$G'|_{(p_0, q_0)} : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \langle p_0, A \cdot q \rangle + \langle p, A \cdot q_0 \rangle = (p_0)^T A q + (q_0)^T A^T p$$

$$G'|_{(p_0, q_0)} = \left((q_0)^T A^T, (p_0)^T A \right) \in \mathbb{R}^{1 \times 2n}$$

$$f'(p) = G'|_{F(p)} \cdot F'|_p = G'|_{(p,p)} \cdot F'|_p = p^T A + p^T A^T,$$

$$(G'|_{(p,q)})^T = \begin{pmatrix} Aq \\ A^T p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$$

$$(G'|_{(p,q)})^T = \begin{pmatrix} Aq \\ A^T p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$$

$$G''|_{(p,q)} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$(f'(p))^T = F'|_p^T \cdot G'|_{F(p)}^T,$$

$$f''(p) = F'|_p^T \cdot G''|_{(p,p)}^T \cdot F'|_p + F''|_p^2 \cdot G'|_{(p,q)}^T = A + A^T.$$

□

Aufgabe 2.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 y \sin(1/x) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass f ist differenzierbar.
- Ist f stetig differenzierbar?

Lösungsnotizen. Wenn $f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ existiert, dann ist es gegeben durch

$$(x, y) \mapsto A(x, y) := \begin{cases} (2xy \sin(1/x) - y \cos(1/x), x^2 \sin(1/x)) & \text{falls } x \neq 0, \\ (0, 0) & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Begründe Diffbarkeit für $x = 0$ (siehe hs Notizen..)

Setze $y = 1$. Dann existiert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x} |_{(\epsilon, 1)}$$

nicht. Also ist die Funktion nicht stetig differenzierbar.

□

Aufgabe 3.

Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass folgendes gilt?

- $f'(x, y) = (x, y)$
- $f'(x, y) = (-x, y)$
- $f'(x, y) = (y, x)$

d) $f'(x, y) = (-y, x)$

Lösung. a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

b) $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

c) $f(x, y) = xy$

d) Es gibt keine solche Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die zweimal differenzierbar ist, denn sonst wäre

$$-1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.$$

Ein Widerspruch.

Allgemein: Wenn es eine solche Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, dann ist sie stetig differenzierbar. Betrachte nun die stetig differenzierbare Funktion

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

$$f \circ \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f \left(\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right).$$

$$(f \circ \gamma)' : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$= (-\sin'(t), \cos(t)) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 1.$$

Also

$$0 = f \circ \gamma(2\pi) - f \circ \gamma(0) = \int_0^{2\pi} (f \circ \gamma)'(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Widerspruch. □

Lokale Minima und Maxima

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = -2y^2 + 7y - x^2y + 2xy.$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder kein lokales Extremum handelt. Besitzt die Funktion ein globales Maximum oder Minimum? Sind die (lokalen) Extreme strikt?

Aufgabe 5 (Doppelpendel).

Wir betrachten ein ebenes physikalisches Doppelpendel. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist die kinetische Energie

$$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(\phi, \psi) = -m_1 \cos \phi - m_2(\cos \phi + \cos \psi).$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte, bestimmen Sie, ob lokale Minima, lokale Maxima oder kein lokales Extremum vorliegen. Geben Sie an einem der lokalen Minima das Taylorpolynom 2. Grades an.

(Bemerkung: physikalische Interpretation: Lokale Minima mit positive definiten Hesse-Matrix sind stabil, das heißt: nimmt V ein lokales Minimum in p an und ist die Gesamtenergie nahe an $V(p)$, dann bleibt die Bahn des System in einer Umgebung von p . Oft nähert man das Potential durch das Taylor-Polynom 2. Grades an. In dieser Näherung kann man die Bewegungsgleichung exakt lösen: jede Bahn ist eine Linearkombination von zwei exakt berechenbaren Schwingungen um p herum. Erstaunlich ist nun: wenn man die Näherung nicht macht, sondern exakt argumentiert, so kann man zeigen, dass das quantitative Verhalten immer noch ähnlich zu der Näherungslösung ist.)

Lokaler Umkehrsatz

Aufgabe 6.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y)^T \mapsto (x^4 + 4x^3, 3y)^T$. Bestimmen Sie die Menge der Punkte $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, in denen f lokal invertierbar ist, d.h., so dass eine offene Umgebung U von (x, y) im \mathbb{R}^2 mit $f|_U$ invertierbar existiert.

Aufgabe 7.

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \mapsto A^{-1}$. Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung $f'(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Zeigen Sie: es gibt eine offene Umgebungen V und W der Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $f|_V: V \rightarrow W$ bijektiv ist und so dass die Umkehrfunktion differenzierbar ist.

Satz über implizite Funktionen

Aufgabe 8.

Zeigen Sie, dass für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$z^3 + z + xy = 1$$

im \mathbb{R}^3 genau eine Lösung $z = g(x, y)$ besitzt. Zeigen Sie, dass die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $g'(1, 1)$.

Aufgabe 9.

Bestimmen Sie die regulären Werte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^4.$$