

## Zentralübung Analysis II

**Aufgabe 1** (Beispiel IX.3.3).

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass  $f$  zweimal partiell differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

(c) Zeigen Sie  $f$  ist stetig differenzierbar, aber  $f$  ist in 0 nicht zweimal differenzierbar.

*Lösung.* Sei  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \begin{cases} \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ \text{exist. nicht} & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ \text{exist. nicht} & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{cases} y \cdot f_2(x, y) + xy \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{y(x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2) + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{y(4x^2 y^2 + x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\ &\stackrel{x=0}{=} -y. \end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \begin{cases} \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ \text{exist. nicht} & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{-4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ \text{exist. nicht} & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \begin{cases} x \cdot f_2(x, y) + xy \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{x(x^2+y^2) \cdot (x^2-y^2) - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{x(-4x^2y^2+x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\
&\stackrel{y=0}{=} +x.
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

Es gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 6|y|$$

und

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 6|x|,$$

also sind die partiellen Ableitungen stetig. Mit Satz IX.2.15 aus der Vorlesung folgt die stetige Differenzierbarkeit von  $f$ . Hingegen kann  $f$  nicht zweimal in 0 differenzierbar sein, da sonst die partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$  vertauschbar sein müssten, siehe Satz IX.3.2 von Schwarz.  $\square$

### Aufgabe 2.

Arbeiten Sie das kombinatorische Argument aus, wieso der Vorfaktor in der Taylorreihe in Folgerung IX.3.7 der Bruch

$$\frac{1}{\alpha!}$$

ist.

## Lokalkonstante Funktionen

**Definition** (Definition IX.2.24). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $Y$  eine Menge. Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt lokalkonstant, wenn jedes  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  in  $X$  besitzt, so dass  $f|_U$  konstant ist.

**Aufgabe 3** (Lemma IX.2.25).

Ist  $f : A \rightarrow Y$  lokal konstant und ist  $A$  zusammenhängend, dann ist  $f$  konstant.

*Lösung.* Sei  $a \in A$  gegeben. Dann folgt aus der lokalen Konstantheit, dass  $U_1 := \{x \in A \mid f(x) = f(a)\}$  offen in  $A$  ist und dass  $U_2 := \{x \in A \mid f(x) \neq f(a)\}$  offen ist. Aus  $A = U_1 \dot{\cup} U_2$ ,  $U_1 \neq \emptyset$  und  $A$  zusammenhängend folgt  $U_2 = \emptyset$ .  $\square$

**Aufgabe 4** (Lemma IX.2.26).

Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt

$$f'(x) = 0 \text{ f\"ur alle } x \in U \iff f \text{ ist lokal konstant.}$$

*Lösung.* „ $\Leftarrow$ “ ist klar.

„ $\Rightarrow$ “: Zu  $p \in U$  wähle  $\epsilon > 0$  mit  $B_\epsilon(p) \subset U$ . Für jedes  $q \in B_\epsilon(p)$  gibt es ein  $\theta \in [0, 1]$  mit

$$f(q) = f(p) + f'(p + \theta(q-p)) \cdot (q-p) = f(p) + 0.$$

Also ist  $f|_{B_\epsilon(p)}$  konstant.

□