Universität Regensburg, Mathematik | SoSe 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann | Zentralübung 5 vom 19.5.2026
Zentralübungsblatt Nr. 4

Zentralübung Analysis II

Stetigkeit

Aufgabe 1.

(a) Seien X und Y topologische Räume, und seien A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A \cup B$. Dann ist eine Funktion $f\colon X \to Y$ genau dann stetig, wenn $f|_A\colon A \to Y$ und $f|_B\colon B \to Y$ stetig sind.

(b) Gilt diese Aussage auch ohne die Voraussetzung, dass A und B abgeschlossen sind. Gilt sie zum Beispiel auch, wenn A und B offen in X sind?

Lösung. Zu (b): Ohne Voraussetzungen ist die Aussage falsch. Man betrachte zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

und $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, \infty)$.
Die Aussage ist wegen der Lokalität aber richtig, falls A und B offen sind.

□

(Folgen-)Kompaktheit

Aufgabe 2. (Übung VIII.6.4 im Skript.)

(a) Wir versehen X mit der diskreten Topologie. Dann ist X folgenkompakt, genau dann, wenn X endlich ist.

(b) Sei X ein folgenkompakter Hausdorffraum und sei A eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist A ebenfalls folgenkompakt.

Aufgabe 3.
Sei X ein kompakter topologischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A_n = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$.

(b) Es gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$.

Zusammenhängende Mengen

Aufgabe 4.
Richtig oder falsch?

(a) Sei A eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes X, dann ist $\mathring{A}$ ebenfalls zusammenhängend.

(b) Seien A, B zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes X, dann ist $A \cap B$ zusammenhängend.

(c) Seien A, B zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, dann ist $A + B := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists\,(x,y) \in A \times B \text{ mit } z = x + y\}$ zusammenhängend.

Aufgabe 5.
Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenhängend* (bzw. *lokal wegzusammenhängend*), wenn jeder Punkt von X eine zusammenhängende (bzw. wegzusammenhängende) Umgebung besitzt. Zeigen Sie:

(a) Ist ein topologischer Raum X lokal zusammenhängend, so ist jede Zusammenhangskomponente $C(x)$, $x \in X$, offen in X.

(b) Ist ein topologischer Raum X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist X bereits wegzusammenhängend.

Produkt-Topologie

Hier ist Aufgabe 3 des 5. Übungsblatts sehr wichtig.

Aufgabe 6.
Für drei topologische Räume X, Y und Z seien die Produkträume $X \times Y$ und $Y \times Z$ mit der Produkttopologie versehen (vgl. 5. Übungsblatt). Zeigen Sie: versehen wir $(X \times Y) \times Z$ und $X \times (Y \times Z)$ ebenfalls mit den Produkttopologien, so ist die Identitätabbildung $(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ ein Homöomorphismus.

Aufgabe 7.
Für zwei topologische Räume X und Y sei der Produktraum $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen.

(a) Sei $f : X \times Y \to Z$, wobei Z ein weiterer topologischer Raum ist. Zeigen Sie: ist f stetig, so sind für jedes $(x_0, y_0) \in X \times Y$ die Abbildungen $Y \to Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$ sowie $X \to Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$, stetig.

(b) In diesem Aufgabenteil seien $X = Y = \mathbb{R}$ und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $(x_0, y_0) \in X \times Y$ die Abbildungen $Y \to Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$ sowie $X \to Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$, stetig sind, dass aber f selbst nicht stetig ist. (Vergleiche Beispiel 2.14.)

(c) Sei nun $g : Z \to X \times Y$ eine Abbildung, wobei X, Y, Z wieder beliebige topologische Räume sind. Zeigen Sie: g ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $\mathrm{pr}_X \circ g : Z \to X$ und $\mathrm{pr}_Y \circ g : Z \to Y$ stetig sind.

Kommentar zu Lösung. Für Aufgabenteil (c) ist Blatt 5, Aufgabe 3 b) sehr nützlich. □

Aufgabe 8.
Für zwei topologische Räume X und Y sei der Produktraum $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Sei $X \neq \varnothing$ und $Y \neq \varnothing$. Zeigen Sie:

(a) $X \times Y$ ist genau dann kompakt, wenn X und Y kompakt sind.

(b) $X \times Y$ ist genau dann folgenkompakt, wenn X und Y folgenkompakt sind.

(c) $X \times Y$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X und Y zusammenhängend sind.

(d) $X \times Y$ ist genau dann wegzusammenhängend, wenn X und Y wegzusammenhängend sind.

Lösung.

(a) Da die Projektionen stetig sind, folgt die Kompaktheit von X und Y aus der Kompaktheit von $X \times Y$.

Seien nun X und Y kompakt. Sei nun $(W_i)_{i \in i}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$.

Vorbemerkung: Man finden Mengen J_i, und für jedes $j \in J_i$ offene Mengen U_j und V_j mit $W_i = \bigcup_{j \in J_i} U_j \times V_j$. O.B.d.A. $J_i \cap J_{i'} \neq \varnothing$ für $i \neq i'$. Sei $J = \bigcup_{i \in I} J_i$. Dann ist $(U \times V_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Zu jedem $j \in J$ sei $\gamma(j)$ as eindeutige Element von I, so dass $j \in J_i$, also $\gamma : J \to I$.

1. Schritt: *Gegeben sei zuächst ein $x_0 \in X$. Wir zeigen die Existenz einer endlichen Teilmenge $K_{x_0} \subset I$ und einer offenen Umgebung $\mathcal{U}_{x_0}$ von x_0 in X, so dass $\mathcal{U}_{x_0} \times Y \subset \bigcup_{i \in I_{x_0}} W_i$.*

Sei $J_{x_0} := \{j \in J | x_0 \in U_j\}$. Dann ist $(V_j)_{j \in J_{x_0}}$ eine offene Überdeckung von Y. Wähle eine endliche Teilmenge $K'_{x_0} \subset J_{x_0}$, so dass $(V_j)_{j \in K_{x'_0}}$ den Raum Y überdeckt. Wir setzen $\mathcal{U}_{x_0} := \bigcap_{j \in K'_{x_0}} U_j$, es ist eine offene Umgebung von x_0. Wir haben $\mathcal{U}_{x_0} \cap Y \subset \bigcup_{j \in K'_{x_0}} U_j \times V_j$. Wir setzen $K_{x_0} := \gamma(K'_{x_0})$. Dies erfüllt das Gewünschte.

1. Schritt: *Konstruktion einer geeigenten endlichen Teilmenge*

Also ist $(\mathcal{U}_{x_0})_{x_0 \in X}$ eine offene Überdeckung von X. Wir bekommen eine endliche Teilmenge $L \subset X$ mit

$$X = \bigcup_{x_0 \in L} \mathcal{U}_{x_0}.$$

Wir definieren dann die endliche Menge

$$K := \bigcup_{x_0 \in L} K_{x_0}.$$

Man prüft nun leicht, dass

$$X \times Y = \bigcup_{i \in K} W_i.$$

(b) recht einfach, wird nicht ausgeführt

(c) Ist $X \times Y$ zusammenhängend, so folgt aus der Stetigkeit der Projektion auch, dass X und Y zusammenhängend sind.

Seien und X und Y zusammenhängend und o.B.d.A. $X \neq \emptyset \neq Y$. Für $(x,y) \in X \times Y$ sei $C(x,y)$ die Zusammenhangskomponente von (x,y). Wähle $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Da Y zusammenhängend ist, ist auch $\{x_0\} \times Y$ zusammenhängend. Also $\{x_0\} \times Y \subset C(x_0, y_0)$. Für jedes $y \in X$ ist analog $X \times \{y\}$ zusammenhängend. Somit

$$X \times \{y\} \subset C(x_0, y) = C(x_0, y_0).$$

Wir erhalten $X \times Y = C(x_0, y_0)$ also ist $X \times Y$ zusammenhängend.

(d) recht einfach, wird nicht ausgeführt

□