Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann

SoSe 2026
Zentralübung 4 vom 12.5.2026
Zentralübungsblatt Nr. 3

Zentralübung Analysis II

Topologische Räume

Aufgabe 1.
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig auf X, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y die Teilmenge $f^{-1}(A)$ von X abgeschlossen ist.

Aufgabe 2.
Eine auf einem topologischen Raum X definierte Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *lokal konstant*, wenn jeder Punkt aus X eine Umgebung besitzt, auf der f konstant ist. Beweisen Sie im Fall eines zusammenhängenden Raumes X die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) f ist konstant,

(b) f ist lokal konstant.

Aufgabe 3.
Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ mit der Spur-Topologie versehen. Dann ist die Inklusion $\iota_A\colon A \hookrightarrow Y$ stetig.

Aufgabe 4.
Sind X, Y und Z topologische Räume, $x_0 \in X$. Seien $f\colon X \to Y$ stetig in x_0 und $g\colon Y \to Z$ stetig in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Aufgabe 5 (Lokalität von Stetigkeit).
Seien X und Y topologische Räume, $x_0 \in X$ und U eine Umgebung von x_0. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist stetig in x_0 genau dann, wenn $f|_U\colon U \to Y$ stetig in x_0 ist.

Aufgabe 6.
[1] Seien X und Y topologische Räume, und seien A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A \cap B$. Dann ist eine Funktion $f\colon X \to Y$ genau dann stetig, wenn $f|_A\colon A \to Y$ und $f|_B\colon B \to Y$ stetig sind.
Gilt diese Aussage auch ohne die Voraussetzung, dass A und B abgeschlossen sind. Gilt sie zum Beispiel auch, wenn A und B offen in X sind?

Aufgabe 7 (Bemerkung VIII.4.8).
Wir betrachten die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$

$$M := \Big(\{0\} \times [-1,1]\Big) \cup \{(x, \sin(\pi/x)) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

[1] noch nicht gemacht

und versehen M mit der von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Die Menge M ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Aufgabe 8. (Übung VIII.6.4 im Skript.)[2]

(a) Wir versehen X mit der diskreten Topologie. Dann ist X folgenkompakt, genau dann, wenn X endlich ist.

(b) Sei X ein folgenkompakter Hausdorffraum und sei A eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist A ebenfalls folgenkompakt.

[2] noch nicht gemacht