

Zentralübung Analysis II

Topologische Räume

Aufgabe 1.

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig auf X , wenn für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y die Teilmenge $f^{-1}(A)$ von X abgeschlossen ist.

Aufgabe 2.

Eine auf einem topologischen Raum X definierte Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal konstant*, wenn jeder Punkt aus X eine Umgebung besitzt, auf der f konstant ist. Beweisen Sie im Fall eines zusammenhängenden Raumes X die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a) f ist konstant,
- (b) f ist lokal konstant.

Aufgabe 3.

Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ mit der Spur-Topologie versehen. Dann ist die Inklusion $\iota_A : A \hookrightarrow X$ stetig.

Aufgabe 4.

Sind X, Y und Z topologische Räume, $x_0 \in X$. Seien $f : X \rightarrow Y$ stetig in x_0 und $g : Y \rightarrow Z$ stetig in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x_0 .

Aufgabe 5 (Lokalität von Stetigkeit).

Sei X und Y topologische Räume, $x_0 \in X$ und U eine Umgebung von x_0 . Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig in x_0 genau dann, wenn $f|_U : U \rightarrow Y$ stetig in x_0 ist.

Aufgabe 6.

Seien X und Y topologische Räume, und seien A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A \cup B$. Dann ist eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $f|_A : A \rightarrow Y$ und $f|_B : B \rightarrow Y$ stetig sind.

Gilt diese Aussage auch ohne die Voraussetzung, dass A und B abgeschlossen sind. Gilt sie zum Beispiel auch, wenn A und B offen in X sind?

Aufgabe 7 (Bemerkung VIII.4.8).

Wir betrachten die folgende Teilmenge von \mathbb{R}^2

$$M := \left(\{0\} \times [-1, 1] \right) \cup \{ (x, \sin(\pi/x)) \mid x \in \mathbb{R}_{>0} \}$$

und versehen M mit der von der Standardtopologie auf \mathbb{R}^2 induzierten Topologie. Die Menge M ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Aufgabe 8. (Übung VIII.6.4 im Skript.)

- (a) Wir versehen X mit der diskreten Topologie. Dann ist X folgenkompakt, genau dann, wenn X endlich ist.
- (b) Sei X ein folgenkompakter Hausdorffraum und sei A eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist A ebenfalls folgenkompakt.