Zentralübung Analysis II

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Aufgabe 1.
Man betrachte die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

b) Sei $f : (-\rho, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Leiten Sie unter Benutzung der Vorlesung f ab.

c) Leiten Sie einen einfachen Ausdruck für f her.

d) Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ gleichmäßig auf dem Intervall $(-\rho, \rho)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Normierte Vektorräume

Wiederholung: Für $p \in [1, \infty)$ und $x = (x_j) \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ definieren wir

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p\Big)^{1/p}.$$

Für $p = \infty$ setzen wir

$$\|x\|_p := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|.$$

Aufgabe 2. (Übung VIII.1.11 im Skript.) Zeigen Sie, dass $\ell^p(\mathbb{R})$ für alle $p \in [1, \infty]$ vollständig ist.

Lösung. Im folgenden schreiben wir $u(n) \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $k \mapsto a_k$. Wir schreiben dann auch $u(n) \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $k \mapsto u_k(n)$, d.h. $u(n) = (u_0(n), u_1(n), u_2(n), \ldots)$.

Der Fall $p < \infty$. Sei $(u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\ell^p(\mathbb{R})$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: \ \|u(n) - u(m)\|_p = \Big(\sum_{k=0} |u_k(n) - u_k(m)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Also auch

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: |u_k(n) - u_k(m)| \leq \|u(n) - u(m)\|_p < \epsilon.$$

Daraus folgt, dass für $k \in \mathbb{N}$ fest, $u_k(n)$ eine Cauchy-Folge ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $u_k(\infty) \in \mathbb{R}$, sodass $u_k(n) \to u_k(\infty)$ für $n \to \infty$. Als Cauchy-Folge ist die Folge $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\bullet\|_p)$ durch eine Konstante $C > 0$. Sei $K \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{K} |u_k(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u(n)\|_p \leq C.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir $\left(\sum_{k=0}^{K} |u_k(\infty)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C$. Für $K \to \infty$ erhalten wir $\left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(\infty)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u(\infty)\|_p \leq C$. Wir haben also $u(\infty) \in \ell^p(\mathbb{R})$ gezeigt. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\|u(n) - u(\infty)\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.
Zu $\epsilon > 0$ wählen wir n_0 wie am Anfang der Lösung. Dann gilt für $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ und für jedes $K \in \mathbb{N}$.

$$\left(\sum_{k=0}^{K} |u_k(n) - u_k(m)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u(n) - u(m)\|_p < \epsilon.$$

Wir betrachten den Grenzwert $m \to \infty$ und erhalten

$$\left(\sum_{k=0}^{K} |u_k(n) - u_k(\infty)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u(n) - u(m)\|_p < \epsilon.$$

Im Grenzwert $K \to \infty$ bekommen wir für $n \geq n_0$: $\|u(n) - u(\infty)\|_p \leq \epsilon$. Somit konvergiert $u(n)$ für $n \to \infty$ in $\ell^p(\mathbb{R})$ gegen $u(\infty)$.
Der Fall $p = \infty$. Sei $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt

$$\|u(n) - u(m)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k(n) - u_k(m)| < \epsilon. \tag{1}$$

Dann konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$, die Folge $(u_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $u_k(\infty)$, d.h. $u(n)$ konvergiert punktweise gegen $u(\infty)$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Da $u(n)$ eine Cauchy-Folge ist, ist sie beschränkt in $\ell^\infty(\mathbb{R})$, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|u_k(n)| \leq C$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Das ergibt auch $\|u(\infty)\|_p \leq C$, also $u(\infty) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Schließlich erhalten wir aus (1) im Limes $m \to \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq n_0$ die Aussage: $|u_k(n) - u_k(\infty)| < \epsilon$ also

$$\|u(\infty) - u(n)\|_\infty = \sup_k |u_k(\infty) - u_k(n)| < \epsilon.$$

Dies ist also die Konvergenz von $u(n)$ gegen $u(\infty)$ in $\ell^p(\mathbb{R})$. □

Metrische Räume, offene und abgeschlossene Mengen

Aufgabe 3. (Übung VII.1.3 im Skript.) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist $N \subset M$ abgeschlossen genau dann, wenn für alle N-wertigen Folgen, die in (M, d) konvergieren, der Grenzwert in N liegt.

Lösung. Die Übung ist inhaltlich identisch mit Übung IV.5.17 (b). □

Aufgabe 4 (Das Innere einer Menge).
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes X. Das *Innere* von A (in X) wird definiert als

$$\mathring{A} := \bigcup \{B \subset X \mid B \subset A \text{ und } B \text{ offen in } X\}.$$

Zeigen Sie: Das Innere von A in X ist die größte offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist. Insbesondere gilt:

$$\mathring{A} = A \iff A \text{ ist offen.}$$

Aufgabe 5.
Zeigen Sie:

a) offene Bälle sind offen,

b) abgeschlossene Bälle sind abgeschlossen,

c) das Innere eines abgeschlossenen Balls ist im allgemeinen nicht der offene,

d) der Abschluss des offenen Balls ist im allgemeinen nicht der abgeschlossene.

Hinweis: bei Aufgaben vom Typ c) und d) konstruiert man am besten ein Gegenbeispiel.

Lösung. Zu a) und b): man nutzt am besten die Aussage, dass $x \mapsto d(x, x_0)$ stetig ist, siehe Analysis I, Übungsblatt 13, Nr. 4. In Proposition IV.5.11 haben wir gezeigt: Urbilder von offenen Mengen unter stetigen Abbildungen sind wieder offen. Daraus folgt sofort: Urbilder von abgeschlossenen Mengen unter stetigen Abbildungen sind wieder abgeschlossen.
Zu c) und d): Man betrachtet offene Bälle von Radius 1 auf einem Raum M, der mindestens 2 Elemente besitzt und auf dem die Metrik die Eigenschaft $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ hat. $\square$