Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann

SoSe 2026
Zentralübung 1 vom 21.4.2026
Zentralübungsblatt Nr. 1

Zentralübung Analysis II

Integration

Aufgabe 1.
Berechnen Sie das Integral $\int_3^5 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+1}}\,dx$.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie

a) $\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$

b) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

d) $\int_a^b \frac{1}{2x^2-12x+26}\,dx$, *Hinweis: Berechnen Sie zunächst* $\arctan'$.

Aufgabe 3.
Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie (im Riemannschen Sinn) existieren. Gebenenfalls machen Sie eine Fallunterscheidung für verschiedene $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Sind die Funktionen eigentlich Riemann-integrierbar, oder uneigentlich Riemann-integrierbar?

$$\text{a)}\quad \int_a^b (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 x^0)\,dx,$$

$$\text{b)}\quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx, \qquad \text{c)}\quad \int_a^b \frac{1}{x}\,dx,$$

$$\text{d)}\quad \int_a^b c^x\,dx, \qquad \text{e)}\quad \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\,dx,$$

Gilt denn für $a < b < c$ die folgende Aussage? Existieren $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_b^c f(x)dx$, so existiert auch $\int_a^c f(x)dx$ und es gilt

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Aufgabe 4.
Kann man den Satz über die Ableitung von Grenzwerten von Folgen von Funktionen (Kapitel VII Theorem 3.3) auf die folgenden Folgen und Reihen von Funktionen anwenden? Untersuchen Sie auch

a) die Existenz und den Wert des punktweisen Grenzwerts

b) die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion und

c) die gleichmäßige Konvergenz

für die folgenden Folgen von Funktionen, $n \in \mathbb{N}_{>0}$,

i) $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

ii) $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $f_n : [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

iii) $g_n(x) := \frac{x}{n}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 5.
Man betrachte die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

b) Sei $f : (-\rho, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Leiten Sie unter Benutzung der Vorlesung f ab.

c) Leiten Sie einen einfachen Ausdruck für f her.

d) Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ gleichmäßig auf dem Intervall $(-\rho, \rho)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Metrische Räume, offene und abgeschlossene Mengen

Aufgabe 6. (Übung VII.1.3 im Skript.) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist $N \subset M$ abgeschlossen genau dann, wenn für alle N-wertigen Folgen, die in (M, d) konvergieren, der Grenzwert in N liegt.

Aufgabe 7 (Das Innere einer Menge).
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes X. Das *Innere* von A (in X) wird definiert als

$$\mathring{A} := \bigcup \{ B \subset X \mid B \subset A \text{ und } B \text{ offen in } X \}.$$

Zeigen Sie: Das Innere von A in X ist die größte offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist. Insbesondere gilt:

$$\mathring{A} = A \iff A \text{ ist offen.}$$

Aufgabe 8.
Zeigen Sie:

a) offene Bälle sind offen,

b) abgeschlossene Bälle sind abgeschlossen,

c) das Innere eines abgeschlossenen Balls ist im allgemeinen nicht der offene,

d) der Abschluss des offenen Balls ist im allgemeinen nicht der abgeschlossene.

Hinweis: bei Aufgaben vom Typ c) und d) konstruiert man am besten ein Gegenbeispiel.