Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Präsenzblatt Woche 2, 20.-24.4.2026

---

1. Aufgabe.

a) Für gegebene $z, w \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \operatorname{Re}\big(w \cdot e^{zt}\big)$. Zeigen Sie
$$F'(t) = \operatorname{Re}\left(w \cdot z \cdot e^{zt}\right) .$$

b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen Sie das Integral:
$$\int_0^1 e^{at} \cos(bt)\, dt.$$

2. Aufgabe.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$.

a) Existiert
$$\lim_{x \searrow 0} x^m (\log x)^n \, ?$$
Wenn, ja, bestimmen Sie den Wert.
Hinweis: betrachten Sie zunächst den Fall $m = 1$ und substituieren Sie $y = -\log x$. Nutzen Sie dann, das Wachstum der Exponentialfunktion $\exp y$ für $y \to \infty$, siehe Satz III.3.7.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, überlegen Sie sich in welchem Sinne das folgende Integral existiert:
$$\int_0^1 x^m (\log x)^n\, dx.$$
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass gilt:
$$\int_0^1 x^m (\log x)^n\, dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$
Hinweis: Schreiben Sie das Integral als
$$\int_0^1 (\log x)^n g'(x)\, dx$$
und verwenden Sie partielle Integration (Satz III.5.8). Man achte darauf, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind.

Kommentar zu Lösung. Subtil ist hierbei, dass $f(x) = (\log x)^n$ nicht stetig differenzierbar in 0 ist. Man muss deswegen zunächst $\int_\varepsilon^1 (\log x)^n x^m\, dx$ betrachten und dann den Limes $\varepsilon \to 0$ nehmen. $\square$

c) Für alle $a, b > 0$ gilt
$$\int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{b}{x}}}{x}\, dx = 0.$$
Hinweis: Führen Sie die Substitution $t = \frac{ba}{x}$ durch.