

Sei $n \geq 1, \lambda \in \mathbb{R}$ und $J :=$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \lambda & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\exp(tJ)$.

Hinweis: Benutzen Sie $tJ = (t\lambda)\mathbb{1} + tS$ mit $S :=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie $S^n, n \geq 0$, explizit.

b) Bestimmen Sie die Lösung $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ des Anfangswertproblems

$$x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2'(t) = 2x_2(t) + x_3(t)$$

$$x_3'(t) = 2x_3(t).$$

4. Aufgabe (4 Punkte).

Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung

$$tx'(t) + x(t) = 2t \cos(t^2), \quad t > 0.$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.