

Übungsblatt 13

Mini-Quiz 11. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt.

- Sei $M = F^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit, die man als Urbild des regulären Werts 0 von F beschreibt. Wie berechnet man $T_p M$ für $p \in M$?
- Sei $M = \Psi(W)$ eine Untermannigfaltigkeit, die man als Bild einer lokalen Parametrisierung Ψ beschreibt. Wie berechnet man $T_p M$ für $p \in M$?
- Satz über Lagrange-Multiplikatoren

1. Aufgabe (1,5+2,5 Punkte).

a) Finden Sie eine Lösung der Gleichung

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

auf dem maximalen Existenzintervall für jedes $x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass keine weiteren Lösungen existieren.

b) Finden Sie für $y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung

$$y'(t) = ty(t)^2 + 2ty(t) + t, \quad y(0) = y_0$$

auf dem maximalen Existenzintervall. Zeigen Sie, dass keine weiteren Lösungen existieren.

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Es sei I ein offenes Intervall mit $t_0 \in I$ und es seien $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y + b(t), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt, die durch

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) b(s) ds.$$

$t \in I$, gegeben ist.

Hinweis zur Berechnung von $y'(t)$: Sie dürfen benutzen, dass für eine Funktion $F : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ die Ableitung von $f : I \rightarrow \mathbb{R}, f(t) := F(t, t)$ gegeben ist durch

$$f'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, t)$$

(Wieso? +1 Bonuspunkt), und wenden Sie dies auf

$$F(x, y) := \int_{t_0}^x \exp \left(\int_s^y a(\tau) d\tau \right) b(s) ds$$

an. Sie dürfen hierbei Differentiation und Integration vertauschen (Wieso? +1 Bonuspunkt).

b) Bestimmen Sie die Lösung zu folgender Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + t^2, \quad y(1) = 2.$$

3. Aufgabe (4 Punkte).

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$x'(t) = \frac{\sqrt{2 - x(t)^2}}{x(t)}, \quad x(0) = 1$$

und geben sie das maximale Existenzintervall an.

Hinweis: Umformen und $y(t) = 2 - x(t)^2$ substituieren. Achten Sie darauf, gut zu argumentieren, wieso das angegebene Existenzintervall maximal ist.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{1 - y(t)^2}$. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zu den Anfangswerten:

a) $y(0) = 1$.

b) $y(0) = -1$.