

Übungsblatt 12

Mini-Quiz 10. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt.

Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und V offen in $\mathbb{R}^k$, und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Wie definiert man die folgenden Begriffe

- f ist eine Immersion,
- 0 ist regulärer Wert von f ,
- f ist ein Diffeomorphismus von U nach V .

1. Aufgabe (4 Punkte).

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^T = A$ und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Funktion

$$f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^T A x.$$

- Zeigen Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren: die stationären Punkte von f sind genau die Eigenvektoren mit Norm 1 von A .
- Folgern Sie, dass ein Eigenwert von A existiert.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Wir betrachten die Funktion $p: \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy$. Bestimmen und klassifizieren Sie die Extrempunkte dieser Funktion.

Hinweis: Studieren Sie die Punkte im Innern des Balles mit „klassischen Methoden“ und den Rand des Balles entweder mit Lagrange-Multiplikatoren oder einer Parametrisierung des Randes.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertproblemen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{(t^2 + t)(x(t)^2 + x(t))}, & x(1) &= 2 \\ y'(t) &= \cos(e^t) e^t \sqrt{1 - y(t)^2}, & y(0) &= 0; \end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung von $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, der Umkehrfunktion von $\sin: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-1, 1)$ (analog zu Beispiel X.2.5 im Skript).

4. Aufgabe (4 Punkte).

Für ein $R \in (0, 1)$ und $\varepsilon \in \{0, 10^{-6}\}$ betrachten wir $f_\varepsilon: \mathbb{T}_R \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x - \varepsilon(y^2 + z^2)$, wobei

$$\mathbb{T}_R := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = R^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f_0 mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren.
- b) Bestimmen Sie, welche dieser stationären Punkte lokale Minima und Maxima von f_0 sind.
- c) (2 Bonuspunkte) Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? Sei M eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^k$, $p \in M$ und $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(p)|_{T_p M} = 0$ und $f''(p)|_{T_p M \times T_p M}$ negativ definit. Dann hat f ein lokales Maximum in p .

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass f_0 und $f_{10^{-6}}$ dieselben stationären Punkte und dieselben lokalen Extrema (vom selben Typ) haben.