Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 26.06.2026, 12:00

Übungsblatt 11

Mini-Quiz 9. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

> Sei U eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ und $p \in U$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen für $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, eine Funktion $F: U \to \mathbb{R}^m$ und ein $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in U$. (Sie müssen nicht die Formel für die Ableitung der implizit definierten Funktion f angeben.)

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ betrachte man die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^T A x.$$

Zeigen Sie, dass $M := f^{-1}(\{1\})$ eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ ist und berechnen Sie T_pM für $p \in M$.
Hinweis: Blatt 8, Aufgabe 2.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Für ein offenes Intervall I und eine C^1-Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir die Abbildung

$$\Psi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f(x)\cos(y) \\ f(x)\sin(y) \\ x \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen in dieser Aufgabe verwenden, dass für $y_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\Psi|_{I\times(y_0,y_0+2\pi)}$ ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

a) Zeigen Sie, dass $S := \Psi(I \times \mathbb{R})$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie in jedem Punkt $p = \Psi(x,y) \in S$ eine Basis des Tangentialraumes T_pS.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Überprüfen Sie, ob folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untermannigfaltigkeiten sind:

a) $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2xy = 0\}$.

b) $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \{x^2, 0\}\}$

c) $M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} = 1\}$

Hinweis zu b) und c): Ein Lösungsmethode ist, aus der Vorlesung zu folgern, dass $M \subset \mathbb{R}^2$ genau dann 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, falls jeder Punkt eine Umgebung U hat, sodass $M \cap U$ der Graph einer C^1-Funktion $x \mapsto f(x) = y$ oder einer Funktion $y \mapsto f(y) = x$ ist. Vergessen Sie nicht, auch 0- und 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten in Erwägung zu ziehen!

4. Aufgabe (4 Punkte).
Für ein $R \in (0,1)$ betrachten wir

$$\mathbb{T}_R := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1 \right)^2 + z^2 = R^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}_R$ eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.
Hinweis: Zeige zuerst, dass für $(x,y,z) \in \mathbb{T}_R$ *gilt* $(x,y) \neq (0,0)$.