

## Übungsblatt 10

**Mini-Quiz 8.** Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

Sei  $U$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  und  $p \in U$ . Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Formulieren Sie den lokalen Umkehrsatz für die lokale Invertierbarkeit von  $f$  im Punkte  $p$ .

---

### 1. Aufgabe (4 Punkte).

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2) &= x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 26, \\ F_2(x, y_1, y_2) &= xy_1 + y_1y_2 + y_2x + 3 \end{aligned}$$

lokal in der Nähe von  $(3, -1, 0)^T$  der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion  $f: (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist, für ein  $\varepsilon > 0$ . Berechnen Sie  $f'(3)$ .

### 2. Aufgabe (4 Punkte).

Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachte man folgende Gleichung für  $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ :

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = xyz. \quad (\text{G1})$$

- Zeigen Sie, dass offene Umgebungen  $U$  von  $(1, -1)^T$  in  $\mathbb{R}^2$  und  $V$  von 0 in  $\mathbb{R}$  mit folgender Eigenschaft existieren: für alle  $(x, y)^T \in U$  gibt es ein eindeutiges  $z = g(x, y) \in V$  so, dass  $(x, y, z)^T$  die Gleichung (G1) löst.
- Zeigen Sie, dass die Funktion  $g: U \rightarrow V$  differenzierbar ist und berechnen Sie  $g'(1, -1)$ .

### 3. Aufgabe (4 Punkte).

Man betrachte folgendes Gleichungssystem im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} e^x - y + x - z = -1, \\ ye^{-z} - e^{-1} = 0. \end{cases} \quad (\text{G2})$$

- Sei  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T \in \mathbb{R}^3$  eine beliebige Lösung von (G2). Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung  $U$  von  $\hat{x}$  in  $\mathbb{R}$  und  $C^1$ -Funktionen  $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$  existieren mit  $g(\hat{x}) = \hat{y}$ ,  $h(\hat{x}) = \hat{z}$  und so, dass für  $y = g(x)$  und  $z = h(x)$  das Tripel  $(x, g(x), h(x))$  für alle  $x \in U$  das Gleichungssystem (G2) löst.
- Sei nun  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T = (0, 1, 1)^T$  und  $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Aufgabenteil a). Bestimmen Sie  $g'(0)$  und  $h'(0)$ .

**4. Aufgabe** (4 Punkte).

Gegeben sei die Abbildung  $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \mapsto A^2$ .

- a) Begründen Sie, dass  $f$  glatt, also unendlich oft differenzierbar ist.
- b) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen  $\partial_{A,B}f$  für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und bestimmen die total Ableitung von  $f$  in  $A$  als lineare Abbildung  $f'(A): \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ .
- c) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen  $V, W$  von  $\mathbf{1}_n$  in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  gibt, sodass  $f|_V: V \rightarrow W$  eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt. Dies nennen wir dann die lokal definierte (*Matrix-*)*Wurzelfunktion*.