

Übungsblatt 9

Mini-Quiz 7. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Was besagt der Satz von Schwarz?
 - Wie definiert man $\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f$ für $\alpha = (3, 2, 1) \in \mathbb{N}^3$?
 - Formulieren Sie den Mittelwertsatz für Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U offen in \mathbb{R}^n .
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

In dieser Aufgabe betrachten wir die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \|x\|_2 \cdot x$.

- Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar auf \mathbb{R}^n ist und geben Sie ihre Jacobi-Matrix an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ an.
- Ist f zweimal differenzierbar?

2. Aufgabe (4 Punkte).

Man betrachte die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

- Zeigen Sie, dass f ein eindeutiges lokales Minimum besitzt.
- Zeigen Sie, dass dieses lokale Minimum ein globales Minimum von f ist.

Hinweis: leiten Sie aus der Taylor-Formel folgende Identität her:

$$f(x, y) + 1 = \frac{1}{2}(x - 1, y) \cdot f''(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, wobei $f''(x, y)$ die Hesse-Matrix von f an der Stelle (x, y) bezeichnet; folgern Sie die Behauptung.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Untersuchen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{x^4}{2} + 2y^2 - 2xy - 2yz + z^2$$

auf kritische Punkte und ob diese jeweils lokale Extrema sind. Sind die gefundenen lokalen Extrema strikte lokale Extrema?

4. Aufgabe (4 Punkte).

In dieser Aufgabe betrachten wir die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x^3 y}{3} \\ -x + y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die eine Umgebung U besitzen so, dass $f|_U: U \rightarrow f(U)$ bijektiv ist und ein differenzierbares Inverses hat.