Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 05.06.2026, 12:00

Übungsblatt 8

Mini-Quiz 6. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Wann ist $f : U \to \mathbb{R}^k$ in $p \in U$ partiell differenzierbar?
- Wann ist $f : U \to \mathbb{R}^k$ in $p \in U$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar?
- Wann ist $f : U \to \mathbb{R}^k$ in $p \in U$ total differenzierbar?
- Wann ist eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar?

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \cos(x^2 y)$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Für $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ betrachte man die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist mit

$$f'(x) = 2x^T A$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ an denen $f'(x) \neq 0$ ist.

c) Skizzieren Sie die Teilmenge $f^{-1}(\{y\}) \subset \mathbb{R}^2$ im Fall $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $y \in \{-4, -1, 0, 1, 4\}$.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f'(x) = 0$ bzw. $g'(x) = 0$, und bestimmen Sie, in welchem dieser Punkte ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum vorliegt. Geben Sie gegebenenfalls an, ob sogar ein *striktes* lokales Minimum oder Maximum vorliegt.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto \cos(x) \cdot \sin(y); \\ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto \cosh(x) \cdot \sin(y). \end{aligned}$$

Hinweis: Sie dürfen Satz IX.3.17 aus dem Skript bereits verwenden.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $\left|\frac{\partial^3 f}{(\partial x)^{\alpha_1}(\partial y)^{\alpha_2}}(q)\right| < \frac{3}{8\sqrt{2}}$ für alle $q \in \overline{B}_2(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| = 3$.
Zeigen Sie, dass ein Punkt $p \in \overline{B}_2(0)$ existiert mit $f(p) < -1$.
Hinweis: Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $f''(0)$ und verwenden Sie den Satz von Taylor.