Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 29.05.2026, 12:00

Übungsblatt 7

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen stetig differenzierbar sind und bestimmen Sie jeweils die Jacobi-Matrix:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(y)^2 z + x^3 z \\ \exp(z)x \end{pmatrix}$

b) $g\colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (r, \varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$

c) $h : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^y$
Erinnerung: $x^y := \exp(y \log(x))$.

d) $l : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2$

2. Aufgabe (4 Punkte).
In dieser Aufgabe betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ in alle Richtungen differenzierbar ist und berechnen Sie die Richtungsableitungen.

(b) Ist f in $(0, 0)$ stetig?

(c) Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar?

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und alle k-mal stetig differenzierbaren Funktionen f definiere:

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + ... + \alpha_n \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n! \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n} \\ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} &:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{falls } |\alpha| \leq k \end{aligned}$$

Für ein $k \in \mathbb{N}$ sei $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Polynom k-ten Grades, d.h. für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ existiere eine Konstante $c_\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} c_\alpha x^\alpha$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt

$$\frac{\partial^{|\alpha|} p}{\partial x^\alpha}(0) = \alpha! c_\alpha.$$

(b) Leiten Sie daraus her, dass bereits $p = 0$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt, sobald $p|_U = 0$ auf einer Umgebung U der $0 \in \mathbb{R}^n$ ist.