Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 22.05.2026, 12:00

Übungsblatt 6

Mini-Quiz 5. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Erklären Sie die Heine-Borel-Eigenschaft eines topologischen Raums X.
- Wann heißt ein topologischer Raum zusammenhängend?
- Wann heißt ein topologischer Raum wegzusammenhängend?

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Für topologische Räume X und Y heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

Sei nun X kompakt, Y Hausdorffsch und $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass f abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet.

2. Aufgabe (5 Punkte).
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und $A : V \to W$ lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   i) A ist stetig.
   ii) A ist stetig in 0.
   iii) Es existiert $C > 0$, sodass für alle $v \in V$ gilt
   $$\|Av\|_W \leq C\|v\|_V$$
   ("A ist beschränkte lineare Abbildung").
   iv) A ist Lipschitz-stetig

   Hinweis: Zeigen Sie i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i).

b) Folgern Sie, dass A stetig ist genau dann, falls die Norm
$$\begin{aligned}\|\cdot\|_A : V &\to \mathbb{R}_{\geq 0},\\ \|v\|_A &:= \|v\|_V + \|Av\|_W\end{aligned}$$
äquivalent ist zu $\|\cdot\|_V$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass $\|\cdot\|_A$ eine Norm ist.

c) Zeigen Sie: Ist V endlich dimensional, so ist A stetig.
Hinweis: Benutzen Sie einen geeigneten Satz aus der Vorlesung.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

a) Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so ist der Abschluss von A ebenfalls zusammenhängend.

b) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Sei X ein topologischer Raum. Definiere die Relation $\sim$ auf $X \times X$ als $x \sim y$ für $x, y \in X$, falls eine zusammenhängende Teilmenge $Z \subset X$ existiert mit $x, y \in Z$. Für $x \in X$ bezeichne die Äquivalenzklasse $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ als *Zusammenhangskomponente* von x in X.

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ gilt $C(x) = [x]$, wobei

$$C(x) := \bigcup \{Z \subset X \,|\, x \in Z \text{ und } Z \text{ zusammenhängend}\},$$

und folgern Sie, dass $[x]$ zusammenhängend ist.

c) Zeigen Sie, dass $C(x)$ abgeschlossen ist in X.

Hinweis: in allen drei Teilen kann Aufgabe 3 nützlich sein.