Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 15.05.2026, 12:00

Übungsblatt 5

Mini-Quiz 4. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Wann nennt man $\mathcal{O} \subset P(X)$ eine Topologie auf X?
- Wann nennt man einen topologischen Raum folgenkompakt?

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Sei X ein topologischer Raum, $N \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie:

a) $\overset{\circ}{N} = X \setminus \overline{(X \setminus N)}$ und $\overline{N} = X \setminus \overset{\circ}{\overbrace{(X \setminus N)}}$.

b) $x \in \overset{\circ}{N} \Leftrightarrow N$ ist eine Umgebung von x.

c) $x \in \overline{N} \Leftrightarrow$ für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap N \neq \emptyset$.

d) $x \in \partial N \Leftrightarrow$ für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap N \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus N) \neq \emptyset$.

Hinweis: Es kann nicht mit Folgen argumentiert werden, da wir hier topologische - und nicht nur metrische - Räume betrachten.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei I eine Menge. Die kofinite[1] Topologie auf I ist definiert als

$$\mathcal{O}_{\text{kofi}} := \{U \subset I \mid I \setminus U \text{ ist endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\} \subset P(I).$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{O}_{\text{kofi}}$ ist eine Topologie auf I, und für alle $x \in I$ ist $\{x\}$ abgeschlossen in $(I, \mathcal{O}_{\text{kofi}})$.

b) Ist I eine endliche Menge, so ist $\mathcal{O}_{\text{kofi}}$ die diskrete Topologie auf X.

c) Ist I eine unendliche Menge, so ist $(I, \mathcal{O}_{\text{kofi}})$ zusammenhängend und nicht Hausdorffsch.

d) Sei $J \subset I$ irgendeine Teilmenge. Dann ist die auf J induzierte Topologie die kofinite Topologie auf J.

---

[1] „finit“ ist ein lateinisches Fremdwort, dessen Bedeutung mit “endlich“ nahezu übereinstimmt. Manche Personen benutzen deswegen das Wort „koendlich“ statt „kofinit“.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Seien X und Y topologische Räume. Die *Produkttopologie* $\mathcal{O}_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ wird folgendermaßen definiert: eine Teilmenge $U \subset X \times Y$ gehört zu $\mathcal{O}_{X\times Y}$, wenn Familien $(U_i)_{i\in I}$ und $(V_i)_{i\in I}$ existieren mit $U_i \in \mathcal{O}_X,\ V_i \in \mathcal{O}_Y$ für alle $i \in I$ und $U = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$.

a) Zeigen Sie, dass die Produkttopologie eine Topologie auf $X \times Y$ ist, und dass eine Teilmenge $B \subset X \times Y$ genau dann Umgebung von $(x_0, y_0) \in X \times Y$ ist, wenn Umgebung $U \subset X$ von x_0 und Umgebung $V \subset Y$ von y_0 existieren mit $U \times V \subset B$.

b) Seien $f : Z \to X, g : Z \to Y$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen stetig sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 &: X \times X \to X, (x, y) \mapsto x; \\ \mathrm{pr}_2 &: X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y; \\ (f, g) &: Z \to X \times Y, z \mapsto (f(z), g(z)) \end{aligned}$$

c) Seien X, Y Hausdorffräume. Zeigen Sie, dass $X \times Y$ ein Hausdorffraum ist.

d) Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ durch die Metrik

$$\begin{aligned} d_{X\times Y} &: (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ &d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} \end{aligned}$$

induziert ist.
Sie müssen nicht zeigen, dass $d_{X\times Y}$ eine Metrik ist.

4. Aufgabe (4 Punkte).

a) Ist X wegzusammenhängend und $f\colon X \to Y$ stetig, für X, Y topologische Räume. Zeigen Sie, dass dann auch $f(X)$ wegzusammenhängend ist.

b) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist X zusammenhängend.

c) Es existiere für alle $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset X$ von x. Zeigen Sie: Ist X zusammenhängend, dann ist X auch wegzusammenhängend.
Hinweis: Beweisen Sie, dass für einen Punkt $x_0 \in X$ die Menge

$$\{x \in X \mid \textit{Es gibt einen Weg von } x \textit{ nach } x_0\} \subset X$$

nichtleer, offen und abgeschlossen ist.
Sie dürfen hierzu für reelle Zahlen $a < b < c$ benutzen: Eine Abbildung $\gamma\colon [a, c] \to X$ ist stetig, wenn $\gamma|_{[a,b]}$ und $\gamma|_{[b,c]}$ stetig sind.