

Übungsblatt 4

Mini-Quiz 3. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Sei V ein Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ Normen auf V . Wann nennt man die Normen äquivalent?
 - X, Y metrische Räume. Was ist eine Kontraktion $f : X \rightarrow Y$?
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei M eine Menge.

Erinnerung: Die diskrete Metrik d_{disc} auf M ist definiert über

$$d_{\text{disc}}(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

für alle $x, y \in M$. Nach Ana I, Blatt 12, Aufgabe 2b) wissen wir, dass (M, d_{disc}) metrischer Raum ist und jede Teilmenge von M offen und abgeschlossen ist bezüglich d_{disc} .

- a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Zeigen Sie:
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge bezüglich d_{disc} genau dann, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n = a_N$ für alle $n \geq N$ ("die Folge ist irgendwann konstant").
Folgern Sie, dass (M, d_{disc}) vollständig ist.
- b) Sei nun $M := \mathbb{N}_{>0}$. Definiere

$$d_{\text{inv}} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$
$$d_{\text{inv}}(n, m) := \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$$

Zeigen Sie, dass (M, d_{inv}) ein metrischer Raum ist, der nicht vollständig ist.

- c) Zeigen Sie, dass d_{disc} und d_{inv} dieselbe Topologie auf M induzieren.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Zeigen Sie, dass die Folge definiert über $x_0 := 2$, $x_{n+1} := \sqrt{3 + \sqrt{x_n}}$ einen Grenzwert $\tilde{x} \in [2, \sqrt{6}]$ hat, und folgern Sie, dass \tilde{x} eine Lösung der Gleichung $x^4 - 6x^2 - x + 9 = 0$ ist.

Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz und dessen Beweis.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

- a) für $p = \infty$ vollständig ist,
- b) für $p = 1$ nicht vollständig ist.

Hinweise: Zur Lösung von a) finden Sie wichtige Hilfsmittel in Kapitel VII. Zur Lösung von b) kann eine Konstruktion ähnlich zu Kap. VIII, Beispiel 1.13 helfen.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $a < b$. Definiere $C^1([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$ und

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

für alle $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$.

- a) Zeigen Sie, dass $(C^1([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$ ein Banachraum ist.

Hinweis: Hierfür können Sie Aufgabe 3a) benutzen.

- b) Sei $x_0 \in [a, b]$. Definiert $\|f\|_{x_0} := |f(x_0)| + \|f'\|_\infty$ eine zu $\|\cdot\|_{C^1}$ äquivalente Norm auf $C^1([a, b], \mathbb{R})$?