Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis **Donnerstag**, 30.04.2026, 14:00

Übungsblatt 3

Mini-Quiz 2. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Was ist eine Norm auf V?
- Wie ist die von einer Norm induzierte Metrik definiert?
- Was besagt die Minkowski-Ungleichung für $p \in [1, \infty)$? Definieren Sie auch die verwendete Norm.

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Wir nennen eine Teilmenge $C \subset V$ konvex, falls für alle $\lambda \in [0,1], v, w \in C$ gilt $\lambda v + (1-\lambda)w \in C$.
Zeigen Sie: Für ein $v_0 \in V$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$ sind die Bälle $B_R(v_0)$ und $\overline{B}_R(v_0)$ konvex.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Erinnerung: Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen $(X, d), (Y, d_Y)$ heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, falls für alle $x, y \in X$ gilt

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d(x, y).$$

Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist stetig. Im folgenden $Y = \mathbb{R}$ und $d_Y(a, b) = |b - a|$.

Sei X ein metrischer Raum. Für $A \subset X$ und $x_0 \in X$ definieren wir

$$\operatorname{dist}(A, x_0) := \inf\{d(x, x_0) | x \in A\} \in [0, \infty]$$

(den Abstand von A zu x_0).

a) Sei $x_0 \in X$. Zeigen Sie: $\operatorname{dist}(A, x_0) = 0 \iff x_0 \in \overline{A}$.
Hinweis: Benutzen Sie Blatt 2, Aufgabe 2b).

b) Sei $A \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x_0 \mapsto \operatorname{dist}(A, x_0)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Ungleichung $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ gilt.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion $f_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax$ zweimal differenzierbar ist und $f_a'' \geq 0$ gilt. Bestimmen Sie x_0 mit $f_a'(x_0) = 0$ und zeigen Sie, dass x_0 ein Minimum von f_a ist, indem Sie $f_a'' \geq 0$ benutzen. Berechnen Sie $f_a(x_0)$ und folgern Sie die gewünschte Ungleichung.

b) Für $r \in [1, \infty)$ und $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\|z\|_r := \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

   Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_r$ definit und homogen ist.

c) Seien $x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq 1$ gilt.

d) Leiten Sie die *Höldersche Ungleichung* her: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

4. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen und seien $M_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass $|f_n(x)| \leq M_n$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie:
   Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ ist, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f_n : (a, b) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von differenzierbaren Funktionen und $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n'\|_\infty < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x_0)| < \infty.$$

   Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion, die erfüllt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'.$$