Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 24.04.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 2

Mini-Quiz 1. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für das Erlangen der Studienleistung.

- Eine Folge von Funktionen konvergiert punktweise gegen eine Funktion.
- Eine Folge von Funktionen konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion.

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Sei N eine Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d) und sei $\widetilde{d} := d|_{N\times N}$ die induzierte Metrik auf N (vergleiche Kapitel IV, Beispiel 5.3).

a) Ist $\big(N, \widetilde{d}\big)$ vollständig, so ist N abgeschlossen in M.

b) Ist (M, d) vollständig, so gilt

$$\big(N, \widetilde{d}\big) \text{ vollständig } \Leftrightarrow N \text{ abgeschlossen in } M.$$

c) Ist $\big(N, \widetilde{d}\big)$ folgenkompakt, so ist $\big(N, \widetilde{d}\big)$ vollständig.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes X. Der *Abschluss* von A (in X) wird definiert als

$$\overline{A} := \bigcap \{B \subset X \mid A \subset B \text{ und } B \text{ abgeschlossen in } X\}.$$

Zeigen Sie:

a) Der Abschluss von A in X ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält. Insbesondere gilt:

$$\overline{A} = A \iff A \text{ ist abgeschlossen.}$$

b) $\overline{A} = \{x \in X \mid \text{Es gibt eine Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } A \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = x\}$.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Untersuchen Sie folgende Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1-x),$$

für $x \in (-1, 1]$.

Hinweis: Wenden Sie Satz 2.5 der Vorlesung an.

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2},$$

für $x \in \mathbb{R}$.

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n},$$

jeweils auf $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ und auf $(-1, 1)$.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Ein metrischer Raumes X heißt genau dann *zusammenhängend*, wenn X sich nicht als Vereinigung $X = U \cup V$ zweier disjunkter, nichtleerer offener Teilmengen $U, V \subset X$ schreiben lässt. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wie immer ist I ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik.

a) Angenommen, I sei kein Intervall. Zeigen Sie, dass dann I nicht zusammenhängend ist.
Hinweis: Sie dürfen die Vorüberlegung zum Beweis von Kor. IV.2.4 nutzen.

b) Angenommen, I sei ein Intervall. Zeigen Sie, dass I zusammenhängend ist.
Lösungsvorschlag: Zeigen Sie dies durch Widerspruch. Wir nehmen an, es gäbe $U, V \subset I$ nichtleere offene Teilmengen von I mit $U \cup V = I$ und $U \cap V = \emptyset$. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ durch $f|_U := 0$ und $f|_V := 1$ definiert.

   i) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und stetig ist.

   ii) Leiten Sie unter Benutzung des Zwischenwertsatzes einen Widerspruch her.