Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 17.04.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 1

1. Aufgabe (4 Punkte).
Sei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \cos(\frac{1}{x}) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ziel der Aufgabe ist, $f \in \mathcal{R}[0,1]$ zu beweisen.

a) Warum können Sätze 3.1 und 4.2 aus Kapitel VI der Analysis I nicht angewendet werden, um diese Aussage zu beweisen?

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta \in (0,1)$ die Funktion $f_{|[\delta,1]}$ auf $[\delta, 1]$ Riemann-integrierbar ist.

c) Leiten Sie daraus her, dass $f \in \mathcal{R}[0,1]$ gilt.

Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe des Aufgabenteils b) *Treppenfunktionen* g_u, g_o *auf* $[0,1]$ *mit* $g_u \leq f \leq g_o$ *und* $\int_0^1 (g_o - g_u)(x)\, dx \leq 3\delta$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ die Ungleichung

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt ist. Zeigen Sie:

a) Ist f konvex und differenzierbar, so gilt $f'(x) \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$ für alle $x < y$ aus $\mathbb{R}$.
Hinweis auf einen möglichen Lösungsweg: Zeigen und nutzen Sie

$$f'(x) \cdot (y - x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t}.$$

b) Ist f konvex und zweimal differenzierbar, so gilt $f'' \geq 0$.

c) Sei $x < y$. Ist $g : [x,y] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $g(x) = g(y) = 0$ sowie $g'' \geq 0$, so gilt $g \leq 0$.

Hinweis: Man wähle $z_0 \in [x,y]$ *mit* $g(z_0) = \max\{g(z) \mid z \in [x,y]\}$. *Zeigen Sie für* $z \in [x,y]$, *dass* $g'(z) \leq 0$ *für alle* $x < z < z_0$ *und dass* $g'(z) \geq 0$ *für* $z_0 < z < y$. *Schließen Sie daraus, dass* $g(z_0) \leq 0$. *Achten Sie auf die Spezialfälle* $z_0 = x$ *und* $z_0 = y$.

d) Ist f zweimal differenzierbar mit $f'' \geq 0$, so ist f konvex.
Hinweis: Nutzen Sie

$$g_{xy}(z) = f(z) - f(x) - \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x).$$