
Präsenzblatt Woche 2, 20.-24.4.2026

1. Aufgabe.

- a) Für gegebene $z, w \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \operatorname{Re}(w \cdot e^{zt})$. Zeigen Sie

$$F'(t) = \operatorname{Re}(w \cdot z \cdot e^{zt}).$$

- b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen Sie das Integral:

$$\int_0^1 e^{at} \cos(bt) dt.$$

2. Aufgabe.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$.

- a) Existiert

$$\lim_{x \searrow 0} x^m (\log x)^n ?$$

Wenn, ja, bestimmen Sie den Wert.

Hinweis: betrachten Sie zunächst den Fall $m = 1$ und substituieren Sie $y = -\log x$. Nutzen Sie dann, das Wachstum der Exponentialfunktion $\exp y$ für $y \rightarrow \infty$, siehe Satz III.3.7.

- b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, überlegen Sie sich in welchem Sinne das folgende Integral existiert:

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n dx.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n , dass gilt:

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als

$$\int_0^1 (\log x)^n g'(x) dx$$

und verwenden Sie partielle Integration (Satz III.5.8). Man achte darauf, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind.

Kommentar zu Lösung. Subtil ist hierbei, dass $f(x) = (\log x)^n$ nicht stetig differenzierbar in 0 ist. Man muss deswegen zunächst $\int_\varepsilon^1 (\log x)^n x^m dx$ betrachten und dann den Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ nehmen. \square

- c) Für alle $a, b > 0$ gilt

$$\int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{b}{x}}}{x} dx = 0.$$

Hinweis: Führen Sie die Substitution $t = \frac{ba}{x}$ durch.

Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter



Abgabe bis Freitag, 17.04.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 1

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \cos(\frac{1}{x}) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ziel der Aufgabe ist, $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ zu beweisen.

- Warum können Sätze 3.1 und 4.2 aus Kapitel VI der Analysis I nicht angewendet werden, um diese Aussage zu beweisen?
- Zeigen Sie, dass für jedes $\delta \in (0, 1)$ die Funktion $f|_{[\delta, 1]}$ auf $[\delta, 1]$ Riemann-integrierbar ist.
- Leiten Sie daraus her, dass $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ gilt.

Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe des Aufgabenteils b) Treppenfunktionen g_u, g_o auf $[0, 1]$ mit $g_u \leq f \leq g_o$ und $\int_0^1 (g_o - g_u)(x) dx \leq 3\delta$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Wir nennen eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt ist. Zeigen Sie:

- Ist f konvex und differenzierbar, so gilt $f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$ für alle $x < y$ aus \mathbb{R} .

Hinweis auf einen möglichen Lösungsweg: Zeigen und nutzen Sie

$$f'(x) \cdot (y - x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t}.$$

- Ist f konvex und zweimal differenzierbar, so gilt $f'' \geq 0$.
- Sei $x < y$. Ist $g : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $g(x) = g(y) = 0$ sowie $g'' \geq 0$, so gilt $g \leq 0$.

Hinweis: Man wähle $z_0 \in [x, y]$ mit $g(z_0) = \max\{g(z) \mid z \in [x, y]\}$. Zeigen Sie für $z \in [x, y]$, dass $g'(z) \leq 0$ für alle $x < z < z_0$ und dass $g'(z) \geq 0$ für $z_0 < z < y$. Schließen Sie daraus, dass $g(z_0) \leq 0$. Achten Sie auf die Spezialfälle $z_0 = x$ und $z_0 = y$.

- Ist f zweimal differenzierbar mit $f'' \geq 0$, so ist f konvex.

Hinweis: Nutzen Sie

$$g_{xy}(z) = f(z) - f(x) - \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x).$$

Übungsblatt 2

Mini-Quiz 1. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für das Erlangen der Studienleistung.

- Eine Folge von Funktionen konvergiert punktweise gegen eine Funktion.
 - Eine Folge von Funktionen konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion.
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei N eine Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d) und sei $\tilde{d} := d|_{N \times N}$ die induzierte Metrik auf N (vergleiche Kapitel IV, Beispiel 5.3).

- a) Ist (N, \tilde{d}) vollständig, so ist N abgeschlossen in M .
- b) Ist (M, d) vollständig, so gilt

$$(N, \tilde{d}) \text{ vollständig} \Leftrightarrow N \text{ abgeschlossen in } M.$$

- c) Ist (N, \tilde{d}) folgenkompakt, so ist (N, \tilde{d}) vollständig.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes X . Der *Abschluss* von A (in X) wird definiert als

$$\bar{A} := \bigcap \{B \subset X \mid A \subset B \text{ und } B \text{ abgeschlossen in } X\}.$$

Zeigen Sie:

- a) Der Abschluss von A in X ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die A enthält. Insbesondere gilt:

$$\bar{A} = A \iff A \text{ abgeschlossen.}$$

- b) $\bar{A} = \{x \in X \mid \text{Es gibt eine Folge } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } A \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x\}$.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Untersuchen Sie folgende Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

- a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k (1-x),$$

für $x \in (-1, 1]$.

Hinweis: Wenden Sie Satz 2.5 der Vorlesung an.

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2},$$

für $x \in \mathbb{R}$.

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

jeweils auf $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ und auf $(-1, 1)$.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Ein metrischer Raum X heißt genau dann *zusammenhängend*, wenn X sich nicht als Vereinigung $X = U \cup V$ zweier disjunkter, nichtleerer offener Teilmengen $U, V \subset X$ schreiben lässt. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wie immer ist I ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik.

a) Angenommen, I sei kein Intervall. Zeigen Sie, dass dann I nicht zusammenhängend ist.

Hinweis: Sie dürfen die Vorüberlegung zum Beweis von Kor. IV.2.4 nutzen.

b) Angenommen, I sei ein Intervall. Zeigen Sie, dass I zusammenhängend ist.

Lösungsvorschlag: Zeigen Sie dies durch Widerspruch. Wir nehmen an, es gäbe $U, V \subset I$ nichtleere offene Teilmengen von I mit $U \cup V = I$ und $U \cap V = \emptyset$. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f|_U := 0$ und $f|_V := 1$ definiert.

i) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und stetig ist.

ii) Leiten Sie unter Benutzung des Zwischenwertsatzes einen Widerspruch her.

Übungsblatt 3

Mini-Quiz 2. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Was ist eine Norm auf V ?
 - Wie ist die von einer Norm induzierte Metrik definiert?
 - Was besagt die Minkowski-Ungleichung für $p \in [1, \infty)$? Definieren Sie auch die verwendete Norm.
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Wir nennen eine Teilmenge $C \subset V$ konvex, falls für alle $\lambda \in [0, 1]$, $v, w \in C$ gilt $\lambda v + (1 - \lambda)w \in C$.

Zeigen Sie: Für ein $v_0 \in V$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$ sind die Bälle $B_R(v_0)$ und $\overline{B}_R(v_0)$ konvex.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Erinnerung: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d) , (Y, d_Y) heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L , falls für alle $x, y \in X$ gilt

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y).$$

Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist stetig. Im folgenden $Y = \mathbb{R}$ und $d_Y(a, b) = |b - a|$.

Sei X ein metrischer Raum. Für $A \subset X$ und $x_0 \in X$ definieren wir

$$\text{dist}(A, x_0) := \inf\{d(x, x_0) \mid x \in A\} \in [0, \infty]$$

(den Abstand von A zu x_0).

- Sei $x_0 \in X$. Zeigen Sie: $\text{dist}(A, x_0) = 0 \iff x_0 \in \overline{A}$.
Hinweis: Benutzen Sie Blatt 2, Aufgabe 2b).
- Sei $A \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x_0 \mapsto \text{dist}(A, x_0)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

- a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Ungleichung $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion $f_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax$ zweimal differenzierbar ist und $f_a'' \geq 0$ gilt. Bestimmen Sie x_0 mit $f_a'(x_0) = 0$ und zeigen Sie, dass x_0 ein Minimum von f_a ist, indem Sie $f_a'' \geq 0$ benutzen. Berechnen Sie $f_a(x_0)$ und folgern Sie die gewünschte Ungleichung.

- b) Für $r \in [1, \infty)$ und $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\|z\|_r := \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_r$ definit und homogen ist.

- c) Seien $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass $\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq 1$ gilt.

- d) Leiten Sie die *Höldersche Ungleichung* her: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

4. Aufgabe (4 Punkte).

- a) Sei $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen und seien $M_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass $|f_n(x)| \leq M_n$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie:

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ ist, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig.

- b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge von differenzierbaren Funktionen und $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x_0)| < \infty.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion, die erfüllt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'.$$

Übungsblatt 4

Mini-Quiz 3. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Sei V ein Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ Normen auf V . Wann nennt man die Normen äquivalent?
 - X, Y metrische Räume. Was ist eine Kontraktion $f : X \rightarrow Y$?
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei M eine Menge.

Erinnerung: Die diskrete Metrik d_{disc} auf M ist definiert über

$$d_{\text{disc}}(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

für alle $x, y \in M$. Nach Ana I, Blatt 12, Aufgabe 2b) wissen wir, dass (M, d_{disc}) metrischer Raum ist und jede Teilmenge von M offen und abgeschlossen ist bezüglich d_{disc} .

- a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Zeigen Sie:
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge bezüglich d_{disc} genau dann, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n = a_N$ für alle $n \geq N$ ("die Folge ist irgendwann konstant").
Folgern Sie, dass (M, d_{disc}) vollständig ist.
- b) Sei nun $M := \mathbb{N}_{>0}$. Definiere

$$d_{\text{inv}} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$
$$d_{\text{inv}}(n, m) := \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$$

Zeigen Sie, dass (M, d_{inv}) ein metrischer Raum ist, der nicht vollständig ist.

- c) Zeigen Sie, dass d_{disc} und d_{inv} dieselbe Topologie auf M induzieren.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Zeigen Sie, dass die Folge definiert über $x_0 := 2$, $x_{n+1} := \sqrt{3 + \sqrt{x_n}}$ einen Grenzwert $\tilde{x} \in [2, \sqrt{6}]$ hat, und folgern Sie, dass \tilde{x} eine Lösung der Gleichung $x^4 - 6x^2 - x + 9 = 0$ ist.

Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz und dessen Beweis.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

- a) für $p = \infty$ vollständig ist,
- b) für $p = 1$ nicht vollständig ist.

Hinweise: Zur Lösung von a) finden Sie wichtige Hilfsmittel in Kapitel VII. Zur Lösung von b) kann eine Konstruktion ähnlich zu Kap. VIII, Beispiel 1.13 helfen.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $a < b$. Definiere $C^1([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$ und

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

für alle $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$.

- a) Zeigen Sie, dass $(C^1([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$ ein Banachraum ist.

Hinweis: Hierfür können Sie Aufgabe 3a) benutzen.

- b) Sei $x_0 \in [a, b]$. Definiert $\|f\|_{x_0} := |f(x_0)| + \|f'\|_\infty$ eine zu $\|\cdot\|_{C^1}$ äquivalente Norm auf $C^1([a, b], \mathbb{R})$?

Übungsblatt 5

Mini-Quiz 4. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Wann nennt man $\mathcal{O} \subset P(X)$ eine Topologie auf X ?
 - Wann nennt man einen topologischen Raum folgenkompakt?
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei X ein topologischer Raum, $N \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie:

- $\overset{\circ}{N} = X \setminus \overline{(X \setminus N)}$ und $\overline{N} = X \setminus \overbrace{(X \setminus N)}^{\circ}$.
- $x \in \overset{\circ}{N} \Leftrightarrow N$ ist eine Umgebung von x .
- $x \in \overline{N} \Leftrightarrow$ für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap N \neq \emptyset$.
- $x \in \partial N \Leftrightarrow$ für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap N \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus N) \neq \emptyset$.

Hinweis: Es kann nicht mit Folgen argumentiert werden, da wir hier topologische - und nicht nur metrische - Räume betrachten.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei I eine Menge. Die kofinite¹ Topologie auf I ist definiert als

$$\mathcal{O}_{\text{kofi}} := \{U \subset I \mid I \setminus U \text{ ist endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\} \subset P(I).$$

Zeigen Sie:

- $\mathcal{O}_{\text{kofi}}$ ist eine Topologie auf I , und für alle $x \in I$ ist $\{x\}$ abgeschlossen in $(I, \mathcal{O}_{\text{kofi}})$.
- Ist I eine endliche Menge, so ist $\mathcal{O}_{\text{kofi}}$ die diskrete Topologie auf X .
- Ist I eine unendliche Menge, so ist $(I, \mathcal{O}_{\text{kofi}})$ zusammenhängend und nicht Hausdorffsch.
- Sei $J \subset I$ irgendeine Teilmenge. Dann ist die auf J induzierte Topologie die kofinite Topologie auf J .

¹„finit“ ist ein lateinisches Fremdwort, dessen Bedeutung mit „endlich“ nahezu übereinstimmt. Manche Personen benutzen deswegen das Wort „koendlich“ statt „kofinit“.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Seien X und Y topologische Räume. Die *Produkttopologie* $\mathcal{O}_{X \times Y}$ auf $X \times Y$ wird folgendermaßen definiert: eine Teilmenge $U \subset X \times Y$ gehört zu $\mathcal{O}_{X \times Y}$, wenn Familien $(U_i)_{i \in I}$ und $(V_i)_{i \in I}$ existieren mit $U_i \in \mathcal{O}_X$, $V_i \in \mathcal{O}_Y$ für alle $i \in I$ und $U = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$.

- Zeigen Sie, dass die Produkttopologie eine Topologie auf $X \times Y$ ist, und dass eine Teilmenge $B \subset X \times Y$ genau dann Umgebung von $(x_0, y_0) \in X \times Y$ ist, wenn Umgebung $U \subset X$ von x_0 und Umgebung $V \subset Y$ von y_0 existieren mit $U \times V \subset B$.
- Seien $f : Z \rightarrow X, g : Z \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen stetig sind:

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : X \times X &\rightarrow X, (x, y) \mapsto x; \\ \text{pr}_2 : X \times Y &\rightarrow Y, (x, y) \mapsto y; \\ (f, g) : Z &\rightarrow X \times Y, z \mapsto (f(z), g(z)) \end{aligned}$$

- Seien X, Y Hausdorffräume. Zeigen Sie, dass $X \times Y$ ein Hausdorffraum ist.
- Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ durch die Metrik

$$\begin{aligned} d_{X \times Y} : (X \times Y) \times (X \times Y) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} \end{aligned}$$

induziert ist.

Sie müssen nicht zeigen, dass $d_{X \times Y}$ eine Metrik ist.

4. Aufgabe (4 Punkte).

- Ist X wegzusammenhängend und $f : X \rightarrow Y$ stetig, für X, Y topologische Räume. Zeigen Sie, dass dann auch $f(X)$ wegzusammenhängend ist.
- Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist X zusammenhängend.
- Es existiere für alle $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset X$ von x . Zeigen Sie: Ist X zusammenhängend, dann ist X auch wegzusammenhängend.
Hinweis: Beweisen Sie, dass für einen Punkt $x_0 \in X$ die Menge

$$\{x \in X \mid \text{Es gibt einen Weg von } x \text{ nach } x_0\} \subset X$$

nichtleer, offen und abgeschlossen ist.

Sie dürfen hierzu für reelle Zahlen $a < b < c$ benutzen: Eine Abbildung $\gamma : [a, c] \rightarrow X$ ist stetig, wenn $\gamma|_{[a, b]}$ und $\gamma|_{[b, c]}$ stetig sind.

Übungsblatt 6

Mini-Quiz 5. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Erklären Sie die Heine-Borel-Eigenschaft eines topologischen Raums X .
 - Wann heißt ein topologischer Raum zusammenhängend?
 - Wann heißt ein topologischer Raum wegzusammenhängend?
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Für topologische Räume X und Y heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

Sei nun X kompakt, Y Hausdorffsch und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass f abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet.

2. Aufgabe (5 Punkte).

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und $A : V \rightarrow W$ lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- A ist stetig.
- A ist stetig in 0.
- Es existiert $C > 0$, sodass für alle $v \in V$ gilt

$$\|Av\|_W \leq C\|v\|_V$$

(„ A ist beschränkte lineare Abbildung“).

- A ist Lipschitz-stetig

Hinweis: Zeigen Sie $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$.

b) Folgern Sie, dass A stetig ist genau dann, falls die Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_A : V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \|v\|_A &:= \|v\|_V + \|Av\|_W \end{aligned}$$

äquivalent ist zu $\|\cdot\|_V$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass $\|\cdot\|_A$ eine Norm ist.

c) Zeigen Sie: Ist V endlich dimensional, so ist A stetig.

Hinweis: Benutzen Sie einen geeigneten Satz aus der Vorlesung.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

- a) Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so ist der Abschluss von A ebenfalls zusammenhängend.
- b) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei X ein topologischer Raum. Definiere die Relation \sim auf $X \times X$ als $x \sim y$ für $x, y \in X$, falls eine zusammenhängende Teilmenge $Z \subset X$ existiert mit $x, y \in Z$. Für $x \in X$ bezeichne die Äquivalenzklasse $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ als *Zusammenhangskomponente* von x in X .

- a) Zeigen Sie, dass die Relation \sim eine Äquivalenzrelation auf X definiert.
- b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ gilt $C(x) = [x]$, wobei

$$C(x) := \bigcup \{Z \subset X \mid x \in Z \text{ und } Z \text{ zusammenhängend}\},$$

und folgern Sie, dass $[x]$ zusammenhängend ist.

- c) Zeigen Sie, dass $C(x)$ abgeschlossen ist in X .

Hinweis: in allen drei Teilen kann Aufgabe 3 nützlich sein.