Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Präsenzblatt Woche 2, 20.-24.4.2026

---

1. Aufgabe.

a) Für gegebene $z, w \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \operatorname{Re}\big(w \cdot e^{zt}\big)$. Zeigen Sie

$$F'(t) = \operatorname{Re}\left(w \cdot z \cdot e^{zt}\right) .$$

b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen Sie das Integral:

$$\int_0^1 e^{at} \cos(bt)\, dt.$$

2. Aufgabe.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$.

a) Existiert

$$\lim_{x \searrow 0} x^m (\log x)^n\,?$$

Wenn, ja, bestimmen Sie den Wert.
Hinweis: betrachten Sie zunächst den Fall $m = 1$ und substituieren Sie $y = -\log x$. Nutzen Sie dann, das Wachstum der Exponentialfunktion $\exp y$ für $y \to \infty$, siehe Satz III.3.7.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, überlegen Sie sich in welchem Sinne das folgende Integral existiert:

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n\, dx.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass gilt:

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n\, dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als

$$\int_0^1 (\log x)^n g'(x)\, dx$$

und verwenden Sie partielle Integration (Satz III.5.8). Man achte darauf, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind.

Kommentar zu Lösung. Subtil ist hierbei, dass $f(x) = (\log x)^n$ nicht stetig differenzierbar in 0 ist. Man muss deswegen zunächst $\int_\varepsilon^1 (\log x)^n x^m\, dx$ betrachten und dann den Limes $\varepsilon \to 0$ nehmen. $\square$

c) Für alle $a, b > 0$ gilt

$$\int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{b}{x}}}{x}\, dx = 0.$$

Hinweis: Führen Sie die Substitution $t = \frac{ba}{x}$ durch.

Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 17.04.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 1

1. Aufgabe (4 Punkte).
Sei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \cos(\frac{1}{x}) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Ziel der Aufgabe ist, $f \in \mathcal{R}[0,1]$ zu beweisen.

a) Warum können Sätze 3.1 und 4.2 aus Kapitel VI der Analysis I nicht angewendet werden, um diese Aussage zu beweisen?

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta \in (0,1)$ die Funktion $f_{|[\delta,1]}$ auf $[\delta, 1]$ Riemann-integrierbar ist.

c) Leiten Sie daraus her, dass $f \in \mathcal{R}[0,1]$ gilt.

Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe des Aufgabenteils b) *Treppenfunktionen* g_u, g_o *auf* $[0,1]$ *mit* $g_u \le f \le g_o$ *und* $\int_0^1 (g_o - g_u)(x)\,dx \le 3\delta$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ die Ungleichung

$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt ist. Zeigen Sie:

a) Ist f konvex und differenzierbar, so gilt $f'(x) \le \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \le f'(y)$ für alle $x < y$ aus $\mathbb{R}$.
Hinweis auf einen möglichen Lösungsweg: Zeigen und nutzen Sie

$$f'(x) \cdot (y - x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t}.$$

b) Ist f konvex und zweimal differenzierbar, so gilt $f'' \ge 0$.

c) Sei $x < y$. Ist $g : [x,y] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $g(x) = g(y) = 0$ sowie $g'' \ge 0$, so gilt $g \le 0$.

Hinweis: Man wähle $z_0 \in [x,y]$ *mit* $g(z_0) = \max\{g(z) \mid z \in [x,y]\}$. *Zeigen Sie für* $z \in [x,y]$, *dass* $g'(z) \le 0$ *für alle* $x < z < z_0$ *und dass* $g'(z) \ge 0$ *für* $z_0 < z < y$. *Schließen Sie daraus, dass* $g(z_0) \le 0$. *Achten Sie auf die Spezialfälle* $z_0 = x$ *und* $z_0 = y$.

d) Ist f zweimal differenzierbar mit $f'' \ge 0$, so ist f konvex.
Hinweis: Nutzen Sie

$$g_{xy}(z) = f(z) - f(x) - \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x)\,.$$

Analysis II: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2026

Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 24.04.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 2

Mini-Quiz 1. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für das Erlangen der Studienleistung.

- Eine Folge von Funktionen konvergiert punktweise gegen eine Funktion.
- Eine Folge von Funktionen konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion.

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Sei N eine Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d) und sei $\widetilde{d} := d|_{N\times N}$ die induzierte Metrik auf N (vergleiche Kapitel IV, Beispiel 5.3).

a) Ist $\left(N, \widetilde{d}\right)$ vollständig, so ist N abgeschlossen in M.

b) Ist (M, d) vollständig, so gilt

$$\left(N, \widetilde{d}\right) \text{ vollständig } \Leftrightarrow N \text{ abgeschlossen in } M.$$

c) Ist $\left(N, \widetilde{d}\right)$ folgenkompakt, so ist $\left(N, \widetilde{d}\right)$ vollständig.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes X. Der *Abschluss* von A (in X) wird definiert als

$$\overline{A} := \bigcap \{B \subset X \mid A \subset B \text{ und } B \text{ abgeschlossen in } X\}.$$

Zeigen Sie:

a) Der Abschluss von A in X ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält. Insbesondere gilt:

$$\overline{A} = A \Longleftrightarrow A \text{ ist abgeschlossen.}$$

b) $\overline{A} = \{x \in X \mid \text{Es gibt eine Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } A \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = x\}$.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Untersuchen Sie folgende Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1 - x),$$

für $x \in (-1, 1]$.

Hinweis: Wenden Sie Satz 2.5 der Vorlesung an.

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2},$$

für $x \in \mathbb{R}$.

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

jeweils auf $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$ und auf $(-1,1)$.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Ein metrischer Raumes X heißt genau dann *zusammenhängend*, wenn X sich nicht als Vereinigung $X = U \cup V$ zweier disjunkter, nichtleerer offener Teilmengen $U, V \subset X$ schreiben lässt. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wie immer ist I ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik.

a) Angenommen, I sei kein Intervall. Zeigen Sie, dass dann I nicht zusammenhängend ist.
Hinweis: Sie dürfen die Vorüberlegung zum Beweis von Kor. IV.2.4 nutzen.

b) Angenommen, I sei ein Intervall. Zeigen Sie, dass I zusammenhängend ist.
Lösungsvorschlag: Zeigen Sie dies durch Widerspruch. Wir nehmen an, es gäbe $U, V \subset I$ nichtleere offene Teilmengen von I mit $U \cup V = I$ und $U \cap V = \emptyset$. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ durch $f|_U := 0$ und $f|_V := 1$ definiert.

i) *Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und stetig ist.*

ii) *Leiten Sie unter Benutzung des Zwischenwertsatzes einen Widerspruch her.*