

Übungsblatt 14 (Bonusblatt)

Dieses Blatt soll nur von denjenigen Studenten abgegeben werden, die noch Punkte brauchen!

Mini-Quiz 14. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Was besagt der 1. Mittelwertsatz?
- Hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum in x_0 einer zweimal differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Notwendige Bedingung an $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$ für ein lokales Maximum in x_0 einer zweimal differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Aufgabe: (Ableitung des Sinus) (4 Punkte).

- a) Wir setzen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sin x}{x}$.

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert und berechnen Sie ihn.

Hinweis: Sie können entweder den Beweis von Lemma V.1.8 anpassen, oder eine geeignete Abschätzung für den Sinus aus der Vorlesung benutzen.

- b) Zeigen Sie $\sin' x = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Setzen Sie direkt mit dem Differenzenquotienten an, und benutzen Sie ein Additionstheorem zusammen mit a) und der Berechnung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ aus der Zentralübung.

Bemerkung: Nutzt man $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$ und benutzt die Ableitungsregeln, so erhält man aus b) sofort $\cos'(x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

- a) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g'$. Zeigen Sie, dass $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = g(x) + c$.
- b) Finden Sie alle differenzierbaren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f' = \text{id}_{\mathbb{R}}$.
- c) Finden Sie alle differenzierbaren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = |x|$.

- d) Zeigen Sie, dass es kein differenzierbares $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \Theta(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ gibt.

3. Aufgabe (4+2 Punkte).

- a) Für $b > 0$ seien $f, g: [0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(0) = 0$ und $g(0) = 0$, die differenzierbar auf $]0, b[$ sind. Wir nehmen ferner an, dass für alle $x \in]0, b[$ gilt $g'(x) \neq 0$ und dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, und dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gilt.

Hinweis: geeigneter Mittelwertsatz

(Dies ist eine Version der Regel von de l'Hospital, welche in dieser Aufgabe somit bewiesen werden soll.)

- b) Folgern Sie: Ist eine stetige Funktion $h: [0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $]0, b[$, sodass $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$ existiert, so ist h differenzierbar in 0 und $h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$.

Hinweis: Wenden Sie a) für $f(x) = h(x) - h(0)$ und für geeignetes g an.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

- a) Bestimmen Sie $T_2^2 f$, das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in 2.
- b) Zeigen Sie für all $x \in]1, 3[$ die Abschätzung $|R_2^2(x)| \leq \frac{1}{16}$.

Hinweis: Stellen Sie das Restglied passend dar und schätzen Sie es ab.