

Übungsblatt 13

Mini-Quiz 13. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Wie definiert man 7^π ?
- Definieren Sie mit dem ε - δ -Kriterium die Aussage $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 11$ für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Definition der Ableitung einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Aufgabe (4 Punkte).

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen folgende Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie in allen diesen Stellen die Ableitung.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := |x|$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} x^3, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

2. Aufgabe (4 Punkte).

Für die Lösung dieser Aufgabe dürfen Ergebnisse aus dem Kapitel V der Vorlesung nicht benutzt werden. Entscheiden Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und falls ja, berechnen Sie sie:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, wobei $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$, mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Hinweis: $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

b) $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, wobei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) := \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$.

c) $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, wobei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) := \frac{\operatorname{Im}(z)}{\sqrt{|z|}}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, wobei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

3. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $f_1, f_2, f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in]a, b[$ mit

- f_1 und f_2 differenzierbar,
- $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in]a, b[$ und
- $f_1(x_0) = f(x_0) = f_2(x_0)$.

Dann ist f differenzierbar in x_0 und $f'_1(x_0) = f'(x_0) = f'_2(x_0)$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $g := f_2 - f_1$ und zeigen Sie, dass $g'(x_0) = 0$ mit einem geeigneten Satz aus der Vorlesung.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist.

(Sie dürfen hier ohne Beweis nutzen, dass $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung $\sin' = \cos$.)

c) (Bonus +2 Punkte): Zeigen Sie, dass die Ableitung f' der Funktion f aus b) nicht stetig in 0 ist.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Eine Funktion $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ zwischen metrischen Räumen heißt Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}_{>0}$), falls für alle $x, y \in M_1$ gilt

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y).$$

Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass eine Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

a) Sie M ein metrischer Raum. Zeigen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung, das heißt das für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

und folgern Sie, dass für jeden Punkt $x_0 \in M$ die Abbildung

$$M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x_0, x)$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist.

b) Wir nennen einen metrischen Raum M beschränkt, falls $x_0 \in M$ und $C \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren sodass für alle $x \in M$ gilt $d(x_0, x) \leq C$.

Folgern Sie mit der Vorlesung: Ein folgenkompakter metrischer Raum M ist beschränkt.

5. Aufgabe (+4 Bonus Punkte).

Für eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ ist die Aufrundung $\lceil r \rceil$ definiert als

$$\lceil r \rceil := \min\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq r\}$$

(also ist $\lceil r \rceil = \lfloor r \rfloor + 1$ falls $r \notin \mathbb{Z}$).

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} +\sqrt{\frac{1}{\lceil 1/x^2 \rceil}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{\lceil 1/x^2 \rceil}} & x < 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gilt

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq f(x) \leq x.$$

b) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

c) Entscheiden Sie für jede Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ob f in x von links stetig ist oder ob f in x von rechts stetig ist.

d) Bestimmen Sie die Menge A aller reellen Zahlen, in denen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

e) Ist die Ableitung $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig?