Analysis I: Übungen
Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 23.01.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 12

Mini-Quiz 12. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Definition von π
- Was ist ein folgenkompakter metrischer Raum?
- Umgebung eines Punktes

---

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Bestimmen Sie, ob folgende Teilmengen von $(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl}})$ offen und/oder abgeschlossen sind:

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$.

ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.

iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (y = x^2) \wedge (-1 < x < 1)\}$.

b) Bestimmen Sie, ob die Teilmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ des metrischen Raumes $(\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, d_{\text{eukl}})$ offen und/oder abgeschlossen ist.

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei (M, d) ein metrischer Raum.

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von M genau dann abgeschlossen ist, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

b) Sei M eine nicht-leere Menge. Wir definieren auf $M \times M$ die Abbildung

$$d\colon M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \quad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass (M, d) ein metrischer Raum ist.

ii) Sei $O \subset M$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass O offen und abgeschlossen ist.

3. Aufgabe ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte).
Seien $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}, z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln für Potenzen mithilfe von Definition 3.6:

a) $r^{z_1+z_2} = r^{z_1} r^{z_2}$

b) $(r_1 r_2)^z = r_1^z r_2^z$

c) $\log(r^x) = x \log(r)$

d) $(r^x)^z = r^{xz}$

e) Zeigen Sie, dass für $r \neq 1$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto r^x$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f streng monoton ist.