Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 16.1.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 11

Mini-Quiz 11. In der Übung wird eine der folgenden Aussagen bzw. Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Additionstheorem für den Kosinus
- Eine Funktion is folgenstetig in x_0
- Eine Funktion is stetig in x_0

---

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium[1], dass folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \overline{z}^2.$$

b) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert über

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{wenn } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{wenn } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte, in denen diese Funktion stetig ist.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass sowohl $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht sind. Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt dicht, wenn es für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ gibt mit $|r - x| < \varepsilon$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir fixieren weiterhin ein $r > 0$ und definieren die Menge $B_r(x_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z - x_0| < r\}$.
Zeigen Sie: f ist stetig in x_0 genau dann, wenn $f|_{D \cap B_r(x_0)}$ stetig in x_0 ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

a) Zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

b) Sei nun $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$. Zeigen Sie f ist Lipschitz-stetig (mit $L = 1$).

c) Sei $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$.
Zeigen Sie: Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $g|_{[r,\infty[}$ Lipschitz-stetig und ist $g|_{]0,r]}$ nicht Lipschitz-stetig.
Hinweis: die Ihnen aus der Schule bekannte 3. binomische Formel

---

[1] d. h. geben Sie in der Definition von Stetigkeit für jedes ε ein passendes δ an.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $z \in \mathbb{C}$. Für alle $k, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ setze

$$a_{n,k} := \frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

a) Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} z^k$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} a_{n,k} z^k = 0$$

b) Zeigen Sie: Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}|z|^k$ konvergiert und ist eine Majorante der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$.

c) Folgern Sie: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left| a_{n,k} z^k \right| < \varepsilon$$

d) Zeigen Sie

$$\exp(z) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

und folgern Sie $e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (hier ist e die in Blatt 8, Aufgabe 3c) definierte Eulersche Zahl).
Hinweis: Zeigen Sie für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein dazu passendes k_0 wie oben

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \limsup_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{k_0 - 1} \left| a_{n,k} z^k \right| + \sum_{k=k_0}^{\infty} \left| a_{n,k} z^k \right| \right) < \varepsilon$$

mithilfe von a) und c).