Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 9.1.2026, 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 10

Mini-Quiz 10. In der Übung wird eine der folgenden Aussagen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Umordnungssatz
- Definition einer Produktreihe
- Satz vom Cauchy-Produkt

Auf diesem Blatt können Sie 24 Punkte erreichen, wo von also 8 Punkte Bonuspunkte sind.

1. Aufgabe (2 Punkte).
Zeigen Sie für $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie $(1-q)\sum\limits_{n=0}^{N} nq^n$, *analog zum Beweis der geometrischen Summenformel.*

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Berechnen Sie für folgende Reihe die Folge der $3n$-ten Partialsummen s_{3n} mit $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie, ob die Reihe konvergiert. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\sqrt{3}i}\right)^k.$$

b) Berechnen Sie für folgende Reihe die Folge der Partialsummen. Bestimmen Sie, ob die Reihe konvergiert. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3\sqrt{k} - 6\sqrt{k+1} + 3\sqrt{k+2}).$$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Prüfen Sie jeweils mit dem Majoranten-, Quotienten- und Wurzel-Kriterium nach[1], ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2k}}$.　　　b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7k}{5k+1}$.

[1] Also jeweils mit allen drei Kriterien!

4. Aufgabe (4 Punkte).
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{k^2-1}$.   b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{n}$.

Hinweis: Für b) fassen Sie Summenglieder passend zusammen. (Sie dürfen benutzen, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ als $n = 4k + r$ für $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ geschrieben werden kann.)

5. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, $a_n \geq 0$, eine monoton fallende Nullfolge.
Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \leq 2^k a_{2^k}$.

b) Folgern Sie für $q \in \mathbb{Q}, q > 0$:
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergiert genau dann, wenn $q > 1$.

6. Aufgabe (6 Punkte).
Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nach der Regel von Leibnitz, also sei $S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ der Grenzwert dieser Reihe.

a) Zeigen Sie $S \geq \frac{1}{2}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen s_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $f : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ die wie folgt definierte Abbildung:

$$\forall k \in \mathbb{N} : f(3k-2) := 2k-1, f(3k-1) := 4k-2, f(3k) := 4k.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eindeutig geschrieben werden kann als

$$n = 3k - r \textit{ mit } r \in \{0, 1, 2\} \textit{ und } k \in \mathbb{N}_{>0},$$

bzw. als

$$n = 4k' - r' \textit{ mit } r' \in \{0, 1, 2, 3\} \textit{ und } k' \in \mathbb{N}_{>0}.$$

c) Seien s_n die n-te Partialsumme von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und s'_n die n-te Partialsumme von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$, die durch f gegebene Umordnung der harmonischen alternierenden Reihe. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$s'_{3k} = \frac{1}{2} s_{2k}$$

und folgern Sie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \frac{1}{2} S \neq S$.

Frohe Weihnachten!