Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 19.12., 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 9

Mini-Quiz 9. In der Übung wird eine der folgenden Aussagen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Leibniz- Regel
- Wurzel-Kriterium für absolute Konvergenz (*ohne Divergenzteil*)
- Quotienten-Kriterium für absolute Konvergenz (*ohne Divergenzteil*)

---

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass folgende Reihen konvergieren:

   i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!}$, mit $m \in \mathbb{N}$,

   ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (k^2 - k + \frac{1}{k+1})}{3^{2k+1} + k}$.

b) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$$

konvergiert.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Überprüfen Sie für jede der folgenden Reihen, ob sie konvergiert oder divergiert. Im Falle von Konvergenz, prüfen Sie bitte, ob sie absolut konvergiert.

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2i} \right)^n$$

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \cdot ((n+1)!)^2}{(2n)!}$$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, mit $a_k := \begin{cases} (\frac{1}{2})^k, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ (\frac{1}{3})^k, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{C}$-wertige Folgen und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, so auch $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.

c) Stimmt die Aussage von b) immer noch, wenn wir „absolut konvergent“ durch „konvergent“ ersetzen? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.