Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 12.12., 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 8

Mini-Quiz 8. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- die $\mathbb{R}$-wertige Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ∞,
- Limes superior einer $\mathbb{R}$-wertigen Folge,
- die Folge der Partialsummen.

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbb{C}$-wertige Folge und sei $C > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq C \cdot |a_{n+1} - a_n|$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq C^n \cdot |a_1 - a_0| \,.$$

b) Ist $C < 1$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die $\mathbb{R}$-wertige Folge, die wie folgt rekursiv definiert ist: $a_0 := 5$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right),$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (in $\mathbb{R}$) und dass der Grenzwert x die Gleichung $x^2 = 5$ erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(a_n)^2 \geq 5$, indem Sie geometrisches und arithmetisches Mittel vergleichen. Beweisen Sie dann, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt ist. Um dann zu zeigen, dass der Grenzwert die gewünschte Gleichung erfüllt, benützen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

3. Aufgabe (2+2+1 Punkte).

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Zeigen Sie:

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ist monoton wachsend.
Hinweis: Zeigen Sie die Ungleichung

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1},$$

indem Sie die linke Seite auf die Form $(1+x)^{n+1}$ bringen und dann die Bernoullische Ungleichung (Blatt 5, Aufgabe 3) anwenden. Benützen Sie dann diese Ungleichung, um $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ abzuschätzen.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $2 \leq a_n < 3$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt: $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} \leq \dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$.
Zur weiteren Information: den Grenzwert nennt man die Eulersche Zahl e.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen.

a) Zeigen Sie: gilt für ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > c, \tag{1}$$

dann gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{k+j_0} \geq c^k a_{j_0}.$$

b) Zeigen Sie: aus der Voraussetzung (1) folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq c.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1\,.$$

c) Zeigen Sie folgende Ungleichung: $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.