Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26

Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 5.12., 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 7

Mini-Quiz 7. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

- Beschränktheit einer Folge
- Teilfolge
- Häufungspunkt einer Folge

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Bestimmen Sie in den folgenden Fällen, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert und falls ja, finden Sie den Grenzwert. Benützen Sie dabei nur die in der Vorlesung gezeigten Sachverhalte. Geben Sie jeweils an, welche Aussage (inklusive der Nummerierung im Skript) Sie benutzt haben:

a) $a_n := 1 + (-2)^{-n}$,

b) $a_n := \dfrac{(-1)^n}{1+n^7}$,

c) $a_n := (-1)^n \dfrac{n^3+3}{2n^3+1}$,

d) $a_n := \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Zeigen Sie:

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reell-wertige Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplex-wertige Folgen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte: $|b_n| \leq a_n$. Dann folgt, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) *(Sandwich-Lemma.)* Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reell-wertige Folgen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$
Wir nehmen zudem an dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ konvergieren. Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ℓ.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Abbildung. Für jede K-wertige Folge $a : \mathbb{N} \to K$ können wir eine neue Folge $a^\phi := a \circ \phi$ definieren, d.h. $a_n^\phi = a_{\phi(n)}$.

a) Angenommen für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\phi^\sharp(\{n\})$ endlich. Zeigen Sie für alle $x \in K$:

$$a_n \to x \text{ für } n \to \infty \implies a_n^\phi \to x \text{ für } n \to \infty.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass jede endliche Teilmenge $X \subset \mathbb{N}$ eine obere Schranke in $\mathbb{N}$ besitzt.

b) *(Invarianz des Grenzwertes unter Umordnung)* Sei σ eine Permutation von $\mathbb{N}$. Folgern Sie: Der Grenzwert von $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ existiert genau dann, wenn der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)}.$$

4. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine K-wertige Folge. Betrachten wir die Folge der Mittelwerte, definiert durch:

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

a) Zeigen Sie: Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Gilt die Umkehrung auch? D.h. folgt aus der Konvergenz der Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert?