# Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 28.11., 12:00 im Zettelkasten

---

## Übungsblatt 6

**Mini-Quiz 6.** In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

- Definieren Sie präzise: „Die $K$-wertige Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in K$.“
- Was ist die Supremumseigenschaft?
- Wann nennt man einen geordneten Körper archimedisch?

---

**1. Aufgabe** (1+1+2 Punkte).

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $z := \frac{\mathrm{i}-4}{3-2\mathrm{i}}$.

b) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{Z}$, für die $(1+\mathrm{i})^k \in \mathbb{R}$.

c) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\mathrm{Re}(2z(1+\mathrm{i})) + z\overline{z} + 1 = 0\,.$$

**2. Aufgabe** (1+3 Punkte).

a) Seien $A, B$ nicht-leere, nach oben beschränkte Mengen. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ nach oben beschränkt ist und zeigen Sie $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

b) Sei $I$ eine nicht-leere Menge und für alle $j \in J$ sei $A_j$ eine nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir schreiben

$$\bigcup_{j\in J} A_j := \bigcup\{A_j \mid j \in J\}$$

für die Vereinigung aller $A_j$.
Zeigen Sie: $\bigcup_{j\in J} A_j$ ist nach oben beschränkt, genau dann, wenn die Menge $\{\sup A_j \mid j \in J\}$ nach oben beschränkt ist und in diesem Fall gilt

$$\sup\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \sup\big\{\sup A_j \mid j \in J\big\}\,.$$

**3. Aufgabe** (4 Punkte).
Wir betrachten die folgenden Teilmengen der reellen bzw. komplexen Zahlen:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R},$$
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}\mathrm{i}] := \{a + b\sqrt{2}\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\mathrm{i}]$ ein Körper ist.

b) Wir definieren die folgende Teilmenge von $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

$$P := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ und } 0 \leq a - b\sqrt{2}\},$$

wobei $\leq$ die übliche Ordnung auf $\mathbb{R}$ ist.
Wir definieren weiterhin für alle $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

$$x \precsim y :\Leftrightarrow y - x \in P.$$

Sie dürfen die Aussage aus der Vorlesung verwenden, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper ist.
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \precsim)$ ein geordneter Körper ist.
Begründen Sie dann, dass der Körper $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ zwei verschiedene Ordnungen trägt, die daraus einen geordneten Körper machen.

c) *Bonusaufgabe* (+2 Bonuspunkte): Zeigen Sie, dass es keine Ordnung $\preccurlyeq$ auf $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\mathrm{i}]$ gibt, so dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}\mathrm{i}], \preccurlyeq)$ ein geordneter Körper ist.

**4. Aufgabe** (4 Punkte).
Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein archimedisch geordneter Körper. Wir betrachten $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $K$ vermöge der injektiven Abbildungen $i_{\mathbb{N}}$ bzw. $i_{\mathbb{Q}}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $\varepsilon \in K_{>0}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

b) Zu jedem $x \in K$ existiert ein eindeutiges $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$.
(Man schreibt dann $\lfloor x \rfloor$ für $n$ und nennt $\lfloor x \rfloor$ die Gauß-Klammer von $x$).
*Hinweis: Für $x > 0$ wende man die Wohlordnung von $\mathbb{N}$ auf eine geeignete Teilmenge von $\mathbb{N}$ an! Benutzen Sie, dass $K$ archimedisch geordnet ist, um den allgemeinen Fall auf $x > 0$ zu reduzieren.*

c) Für alle $x, y \in K$ mit $y - x > 1$, existiert $a \in \mathbb{Z}$, so dass $x < a < y$.
*Hinweis: Betrachten Sie $\lfloor x + 1 \rfloor$.*

d) Für alle $x, y \in K$ mit $y > x$, existiert $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.
*Hinweis: Nutzen Sie c) und zusätzlich die archimedische Eigenschaft oder a).*